

Aprobat de Ministerul Educației și Cercetării  
prin Ordinul nr. 3886 din 24.05.2004

Lucrarea intitulată „**Matematică – clasa a IX-a. Algebră • Geometrie. Trigonometrie**“, este o culegere elaborată în conformitate cu programa școlară corespunzătoare ofertei educaționale „**Trunchi comun și curriculum diferențiat**“.

Pe lângă posibilitatea perfecționării deprinderilor de calcul și raționament, lucrarea dă posibilitatea dezvoltării capacităților intelectuale de explorare/ investigare a problemelor de matematică, precum și stimulării interesului și motivației pentru studiul și aplicarea matematicii.

Lucrarea este alcătuită din trei părți în care găsim exerciții și probleme de algebră, de geometrie și trigonometrie, precum și răspunsuri, indicații și soluții complete.

Culegerea este recomandată tuturor elevilor de clasa a IX-a indiferent de specializarea sau de profilul pe care îl urmează. De asemenea, se adresează profesorilor de matematică, fiind un instrument auxiliar de informare științifică pentru lecțiile curente, lecțiile recapitulative sau pentru pregătirea concursurilor școlare.

ISBN 973-8418-88-7



9 789738 418882

MARIUS BURTEA, GEORGETA BURTEA • MATEMATICĂ • CLASA A IX-A

MARIUS BURTEA

GEORGETA BURTEA

# MATEMATICĂ<sup>N</sup>



- Algebră
- Geometrie  
Trigonometrie

# IX

EDITURA  CARMINIS



Marius Burtea

Georgeta Burtea

# MATEMATICĂ

clasa a IX-a

- ALGEBRĂ
- GEOMETRIE  
TRIGONOMETRIE

Editura Carminis  
Pitești

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

**BURTEA, GEORGETA**

**Matematică: clasa a IX-a: algebră, geometrie,**

**trigonometrie/** Georgeta Burtea, Marius Burtea. –

Pitești: Carminis Educațional, 2004

328 p.; il.; 23,5 cm

**ISBN 973-8418-88-7**

I. Burtea, Marius

51(075.35)

**Copyright © Editura CARMINIS**

## PREFAȚĂ

Lucrarea intitulată „Matematică – clasa a IX-a. Algebră. Geometrie. Trigonometrie”, reprezintă o culegere de probleme care vine în sprijinul manualelor alternative pentru clasa a IX-a.

Aceasta este elaborată în conformitate cu programa școlară corespunzătoare ofertei educaționale „Trunchi comun și curriculum diferențiat”.

Problemele cuprinse în fiecare capitol vin în sprijinul cunoașterii, înțelegerii și aprofundării conceptelor matematice prevăzute de programa școlară.

Pe lângă posibilitatea perfecționării deprinderilor de calcul și raționament, lucrarea dă posibilitatea dezvoltării capacităților intelectuale de explorare/ investigare a problemelor de matematică, precum și a stimulării interesului și motivației pentru studiul și aplicarea matematicii.

Lucrarea este alcătuită din 3 părți:

Partea I, intitulată „Elemente de algebră” cuprinde exerciții și probleme despre mulțimea numerelor reale, elemente de logică matematică, elemente generale despre funcții, funcția de gradul I și funcția de gradul al II-lea.

Partea a II-a, intitulată „Elemente de geometrie” cuprinde exerciții și probleme de geometrie vectorială în plan, trigonometrie și aplicații ale trigonometriei în geometria plană.

Partea a III-a, cuprinde răspunsuri, indicații și soluții complete pentru un număr foarte mare de probleme.

Culegerea este recomandată tuturor elevilor de clasa a IX-a indiferent de specializarea sau de profilul pe care îl urmează. De asemenea se adresează profesorilor de matematică, fiind un instrument auxiliar de informare științifică pentru lecțiile curente, lecțiile recapitulative sau pentru pregătirea concursurilor școlare.

Ceea ce recomandă această culegere de probleme este faptul că prezintă o paletă largă de probleme organizate de la probleme obișnuite, uzuale la probleme complexe, originale.

*Autorii*

# ELEMENTE DE ALGEBRĂ

## I. MULȚIMI ȘI ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

### 1 MULȚIMEA NUMERELOR REALE

#### 1.1. OPERAȚII ALGEBRICE CU NUMERE REALE

□1. Se consideră numerele zecimale  $x = \frac{78}{10^3}$  și  $y = \frac{52}{10^2}$ .

Să se scrie sub formă de fracție zecimală numerele:

$$x + y; y - x; xy; x^2; y^3; (10x + y)^2; (x - 10^{-1}y)^2.$$

□2. Să se efectueze:

$$\text{a) } \frac{\left(\frac{7}{48} + \frac{13}{24} - \frac{3}{4}\right) \cdot 6\frac{2}{5} - 3\frac{1}{5} \left(2\frac{3}{5} - 5\frac{1}{10}\right)}{\left(\frac{4}{7} - \frac{1}{5}\right) : \frac{26}{35} - \frac{43}{10}};$$

$$\text{b) } (\sqrt{3})^5 : (-\sqrt{3^3}) - 3 \cdot \sqrt{0,3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3;$$

$$\text{c) } \left[ \sqrt{6561} \cdot \frac{-3,4(1)}{-27,(9)} - \left(\frac{4}{3}\right)^{-2} \cdot 0,(4) \right] \cdot \left(\frac{-6}{\sqrt{7}}\right)^2 \cdot \frac{1}{10};$$

$$\text{d) } \frac{1}{\sqrt{10^4}} - \sqrt{9,61} : (3,1)^1 + \sqrt{0,0576} \cdot (0,2)^2;$$

$$\text{e) } [-1,2(5) + 0,1(4)] \cdot [12 - 1,1(5) - 1,8(4)].$$

□3. Să se efectueze:

$$\text{a) } \frac{2}{3} + \frac{\left(\frac{1}{18} \cdot \frac{8}{75} + \frac{15}{8} \cdot \frac{32}{45}\right) : 2\frac{2}{3}}{2\frac{4}{5} \left(\frac{20}{63} \cdot 2\frac{7}{10} - \frac{25}{28} : 1\frac{1}{14}\right)};$$

$$\text{b) } 0,1(2) \cdot \left[ 99 + \frac{\frac{3}{6} - 0,25}{\frac{1}{6} + \frac{1}{2}} : 0,75 - 3\frac{1}{4} : \left(0,225 + \frac{1}{10}\right) \right];$$

$$c) \left[ (5 + 2\sqrt{6})^4 + \frac{1}{(5 - 2\sqrt{6})^4} \right] \cdot \frac{(40 - 16\sqrt{6})^4}{1024};$$

$$d) \frac{\left(-\frac{3}{7}\right) \cdot \frac{14}{11} : \frac{33}{484} - (-2^3) - \left[-\frac{1}{0, (6)}\right]^2 : 2\frac{1}{4}}{\left(\frac{13}{10} - 5, 2\right) + [0, 5(3) - 2, (3)] - \left(-7\frac{1}{2} + 5\frac{3}{4}\right) + 1, 95}.$$

□4. Să se arate că următoarele numere sunt inverse unul altuia:

$$x = \left[ \left( \frac{7}{45} + \frac{11}{30} - \frac{5}{12} \right) : 1, 0(5) - 0, 05 \right] : \frac{1}{40},$$

$$y = \left\{ 0, 8(3) + [0, 1(6) - 0, (4) + 0, 08(3)] : \frac{7}{3} \right\} \cdot \frac{7}{20} + \frac{19}{80}.$$

□5. Se dau numerele reale  $a = 5 - 2\sqrt{6}$  și  $b = 2\sqrt{6} + 5$ . Să se arate că cele două numere sunt inverse unul altuia și că  $\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{b - a + 3\sqrt{ab + 5}}{\sqrt{3}}$ .

□6. Se dau numerele reale:

$$A = \left[ 2\frac{3}{10} - 15\frac{1}{5} \right] : (-0, 86) \cdot 0, 0(6) \text{ și } B = \frac{1, 6(1) - 3, 3(8) - 1, (2)}{6 : 6\frac{2}{3} - 6\frac{3}{5} \cdot 1\frac{3}{22} - \frac{2}{5}} - 1, (428571).$$

Să se calculeze:

a)  $A - B$ ;  $A + 7B$ ;  $\frac{A^2 + B^2}{3A - B}$ ;

b) suma inverselor numerelor  $A$  și  $B$ ;

c) suma opuselor numerelor  $A$  și  $B$ .

□7. Dacă  $\frac{a}{3} - \frac{b}{8} + \frac{c}{11} = 0, 91$ , să se calculeze valoarea expresiei:

$$E = \frac{c}{22} \cdot \frac{200}{91} + \frac{b}{8} \cdot \frac{100}{-91} - \left( -\frac{100}{91} \right) \cdot \frac{a}{3} - 1.$$

□8. Dacă  $a^2 + b^2 - 2a - 4b + 5 = 0$ , să se calculeze  $a^{2005} + (b - a)^{2005}$ .

□9. a) Dacă  $4x^2 + 9y^2 = 256$  și  $2x + 3y = 20$ , să se calculeze  $xy$ ,  $2x - 3y$ ,  $x$  și  $y$ .

b) Dacă  $3a - 5b = 8$  și  $9a^2 + 25b^2 = 160$ , să se calculeze  $ab$ ,  $3a + 5b$ ,  $a$ ,  $b$ .

□10. Fie  $a$  și  $b$  numere reale cu proprietatea că  $a + b = 10$  și  $ab = 15$ . Să se calculeze:

a)  $a^2 + b^2$ ,  $a^3 + b^3$ ,  $a^4 + b^4$ ,  $a^6 + b^6$ ;

b)  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ,  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ ,  $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}$ ,  $\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4}$ ,  $\frac{1}{a^5} + \frac{1}{b^5}$ .

□11. Să se determine numerele reale  $a$  și  $b$ , respectiv  $x$  și  $y$  dacă:

a)  $2a^2 + 25b^2 + 5(2a + 5) - 10ab = 0$ ;

b)  $5x^2 + 9y^2 - 6x(2 - y) + 9 = 0$ .

□12. Să se verifice dacă raportul  $r = \frac{24a - 9b}{14a - 12, 9b}$  este pătratul unui număr real știind că  $\frac{2a}{7b} = 3 \cdot 10^{-1}$ .

□13. Știind că  $\frac{a}{b} = 2, (6)$ , să se stabilească dacă raportul  $r = \frac{7a + 2, (6)b}{5a - 13b}$  este cubul unui număr real.

□14. Să se stabilească valoarea de adevăr a următoarelor relații:

a)  $a(b + c)(b + c - a) + b(a + c)(a + c - b) + c(a + b)(a + b - c) = 6abc$ ;

b)  $[4ab - (a^2 + 1)(b^2 + 1)]^2 - (a^2 - 1)^2(b^2 - 1)^2 = 4(a - b)^2(1 - ab)^2$ ;

c)  $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + 3(a + b + c)(ab + bc + ca)$ ;

d)  $(a + b + c)^3 - (-a + b + c)^3 - (a - b + c)^3 - (a + b - c)^3 = 24abc$ ;

e)  $\frac{1}{1 + a + 2a^2 + a^3 + a^4} + \frac{1}{a^4 - a^3 + 2a^2 - a + 1} \geq \frac{2}{a^4 + a^2 + 1}$ ;

f)  $\left( \frac{a + b}{1 - ab} - \frac{a - b}{1 + ab} \right) : \left( 1 + \frac{a^2 - b^2}{1 - a^2b^2} \right) = \frac{2b}{b^2 - 1}$ ;

g)  $\left[ \left( \frac{a + 1}{a - 1} \right)^3 - 1 + 3\left( \frac{a + 1}{a - 1} \right) - 3\left( \frac{a + 1}{a - 1} \right)^2 \right] : \left[ 1 - \left( \frac{a - 1}{a + 1} \right)^3 + 3\left( \frac{a - 1}{a + 1} \right) \left( \frac{a - 1}{a + 1} - 1 \right) \right] = \left( \frac{a + 1}{a - 1} \right)^3$ ;

h)  $\frac{a + 2}{a - 2} : \left( \frac{6a}{a^3 - 8} + \frac{2a}{a^2 + 2a + 4} + \frac{1}{2 - a} \right) - \frac{4a + 4}{a - 2} \leq a$ .

□15. Să se efectueze operațiile cu puteri cu exponent întreg:

a)  $4^2 \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^{15} \cdot \left( \frac{1}{8} \right)^{\sqrt{81}} \cdot 16^5$ ;

b)  $\frac{12^{-4}}{(4^2)^3} \cdot \frac{(2^3)^8}{6^3} \cdot (1, 5)^5$ ;

c)  $\left[ 3 \cdot 5^2 - 3(4 + 3^2 - 1^5)^3 \cdot (4 \cdot 2^3 - 8 \cdot 2^2)^4 \right] : 15^{2^0}$ ;

$$d) 5^{18} \cdot 5^{-6} + 6^{203} \cdot 36^{-100} - 4 \cdot (2^2)^5 : \left\{ 5^4 \cdot (5^3)^2 \cdot 25 + (6^{50})^2 \cdot [(3 \cdot 2)^{33}]^{-3} \cdot (2 \cdot 3)^2 - 2^9 \cdot 8 \right\};$$

$$e) \left( -\frac{4}{5} \right)^{-2} \cdot \left[ \left( -\frac{5}{6} \right)^3 \right]^{-15} : \frac{125^3}{24^3} : \left[ \left( \frac{36}{25} \right)^{10} \right]^{-2} - \left( \frac{25}{48} \right)^2 : \left( -\frac{5}{4} \right)^{-2} : \left( -\frac{15}{32} \right)^3 \cdot \frac{(-5)^{-2} \cdot [(-2)^2]^{-2}}{(-3)^{-3}}.$$

□ 16. Să se efectueze:

$$a) \frac{a^{-2} - 9b^{-2}}{a^{-2} - b^{-2}} \cdot \frac{a^{-1} - b^{-1}}{3b^{-1} + a^{-1}};$$

$$b) \frac{a^{-3} + b^{-3}}{a^{-1} - b^{-1}} \cdot \frac{a - b}{a^{-2} - a^{-1}b^{-1} + b^{-2}};$$

$$c) \left[ a - (2 - a)^{-1} \right]^{-1} : \left[ \frac{a(a - 2) + a^0}{a^0 - (a - a^0)} \right]^{-1};$$

$$d) \left[ \left( a^2 - \frac{1}{b^2} \right)^a \cdot \left( b + \frac{1}{a} \right)^{b-a} \right] : \left[ \left( b^2 - \frac{1}{a^2} \right)^b \cdot \left( a - \frac{1}{b} \right)^{a-b} \right].$$

□ 17. Să se scrie sub formă mai simplă expresiile:

$$a) \left[ \frac{(2a^{-1}x^{-n})^2}{by^{-1}} \right]^{-2} \cdot \left[ \frac{a^2x^n}{4(b^{-1}y^2)^2} \right]^{-2};$$

$$b) a^3(a^n)^n \cdot \left( \frac{a}{a^n} \right)^{-n} - \frac{a^{7n} \cdot (a^4)^n}{a^5} - \frac{1}{a^{n+1}} \cdot (a^{n^2+4} - a^{6n}) \cdot (a^{6n-4} + a^{n^2}).$$

□ 18. a) Să se scrie sub formă mai simplă expresia:

$$(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)(a^8 + b^8) \dots (a^{2^n} + b^{2^n}).$$

$$b) \text{ Fie } A = \left( 1 + \frac{1}{a} \right) \left( 1 + \frac{1}{a^2} \right) \left( 1 + \frac{1}{a^4} \right) \dots \left( 1 + \frac{1}{a^{2^n}} \right). \text{ Pentru } a = 2, \text{ să se arate}$$

că  $A < 2$ .

□ 19. Care sunt valorile posibile ale expresiilor:

$$a) E_1 = (-1)^{k+1} \left( -\frac{2}{3} \right) - (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{3} + (-1)^{k+2}, k \in \mathbb{N};$$

$$b) E_2 = -\frac{2}{5}(-1)^{n^2+n} + \frac{1}{2}(-1)^{n+2} + \frac{(-1)^{2m+3}}{10}, m, n \in \mathbb{N};$$

$$c) E_3 = -\frac{3}{4}(-1)^{m+5} - \left( \frac{2}{3} \right)^{-2} (-1)^{n+2} - \frac{7}{2}(-1)^{2p+3} + \frac{1}{2} \cdot (-1)^{q^2+q+5}, m, n, p, q \in \mathbb{N}?$$

□ 20. Care este valoarea maximă a expresiei:

$$E = \frac{5}{2}(-1)^{2m+n+1} - \left( -\frac{2}{5} \right) (-1)^{m+2n} - \frac{3}{4}(-1)^{n+1} - 3 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) \cdot (-1)^{m+1}, m, n \in \mathbb{N}?$$

□ 21. Dacă  $2a(a - 5) + 2b(b - 1) + 13 = 0$  să se calculeze:

$$(a - 1)^{2005} + (a - 8b)^{2005}.$$

□ 22. Să se calculeze folosind operațiile cu radicali:

$$a) (\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{32} - \sqrt{200}) - \left( \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} + \sqrt{27} \right);$$

$$b) (\sqrt{75} + \sqrt{21} + \sqrt{1}) \cdot (1 + \sqrt{12});$$

$$c) (2\sqrt{8} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2})(\sqrt{72} - 5\sqrt{20} - 2\sqrt{2});$$

$$d) \sqrt{2} + \sqrt{2^2} + \sqrt{2^3} + \dots + \sqrt{2^{2005}}.$$

□ 23. Să se determine media aritmetică, media geometrică și media armonică a numerelor  $a$  și  $b$ , știind că:

$$a) a = \sqrt{98} + \sqrt{32} - \sqrt{50}, b = \sqrt{162} + \sqrt{18} - \sqrt{72};$$

$$b) a = 3\sqrt{128} + \sqrt{200} - 2\sqrt{242}, b = \sqrt{32} - \sqrt{288} + 2\sqrt{450};$$

$$c) a = \frac{\sqrt{16^2 + 12^2} + \sqrt{16^2 - 12^2} - \sqrt{16 - 12}}{18 + 2\sqrt{28}},$$

$$b = \left[ \frac{1}{48} : \sqrt{\frac{25}{256}} + \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \cdot \sqrt{20,25 - 1} \right] : \sqrt{0,32(1)};$$

$$d) a = \sqrt{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{7 - 2\sqrt{6}}} + 2\sqrt{5} + 5, b = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{\sqrt{4} + 5} - 2\sqrt{5}.$$

□ 24. Să se determine valoarea de adevăr a propozițiilor:

$$p_1 : \sqrt{5n+2} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N};$$

$$p_2 : \sqrt{2 + 2 \cdot 3^n + 9^n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N};$$

$$p_3 : \sqrt{4 - \sqrt{15}} \cdot (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6}) \in \mathbb{N};$$

$$p_4 : (\sqrt{5} - 2)^{-1} \cdot \frac{5 - 2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} - \left[ \left( \sqrt{4 + \sqrt{7}} \right)^{-1} - \left( \sqrt{4 - \sqrt{7}} \right)^{-1} \right]^2 \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}.$$

□ 25. Să se arate că expresia  $\left[ \sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{(2 + \sqrt{3})^{-1}} \right]^2 + \left[ \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{(7 + 4\sqrt{3})^{-1}} \right]^2$

nu este număr irațional.

□ 26. Dacă  $x$  este partea întregă a numărului  $-24,71$  și  $x - 8y = 7$ , să se calculeze  $\sqrt{(x-7)^2 - 15y^2} + \sqrt{(x+25)^2 - 15(y^3 + 64)}$ .

□ 27. Să se arate că următoarea expresie nu depinde de  $x$ :

$$E(x) = x\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{16-x^2} + 8}{\sqrt{16-x^2} + 4} - \sqrt{(x+4)^3} + \sqrt{(4-x)^3}, x \in [-4, 4].$$

□ 28. Să se arate că dacă  $x \in [-1, 1]$ ,  $y \in [-3, 4]$ , atunci expresia  $\sqrt{(x+y-5)^2} + \sqrt{(2x+y+5)^2} - \sqrt{(x-y-4)^2} + \sqrt{(2x-y-5)^2}$  nu depinde de  $x$  și  $y$ .

□ 29. Să se scrie ca sumă algebrică de doi radicali simpli:  $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ ;  $\sqrt{5-\sqrt{21}}$ ;  $\sqrt{17+12\sqrt{2}}$ ;  $\sqrt{5-\sqrt{24}}$ ;  $\sqrt{3+2x\sqrt{3-x^2}}$ ,  $x \in [0, \sqrt{3}]$ ;  $\sqrt{8a-2\sqrt{16a^2-9}}$ ,  $a > \frac{3}{4}$ .

□ 30. Să se arate că numerele  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sunt raționale dacă:

$$A = \sqrt{13-30\sqrt{2-\sqrt{9-4\sqrt{2}}}} + \sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$$

$$B = \sqrt{26+6\sqrt{13-4\sqrt{8+2\sqrt{6-\sqrt{20}}}}} + \sqrt{26-6\sqrt{13+4\sqrt{8-2\sqrt{6+\sqrt{20}}}}}$$

$$C = \sqrt{25+4\sqrt{8-2\sqrt{6+2\sqrt{5}}}} - \sqrt{25-4\sqrt{8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}}}$$

□ 31. Să se arate că  $\frac{2a-b}{2b+a} \in \mathbb{Q}$  știind că:

$$a = \sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{9-4\sqrt{5}} \quad \text{și} \quad b = \sqrt{\sqrt{7}-1} - \sqrt{11-4\sqrt{7}}.$$

□ 32. Se consideră numerele  $a = \sqrt{28-16\sqrt{3}}$  și  $b = \sqrt{3+\sqrt{3}-\sqrt{13+\sqrt{48}}}$ .

$$\text{Să se arate că } \left( \frac{b^2-a}{a+\sqrt{8b}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \in \mathbb{Q}.$$

□ 33. Să se arate că dacă  $a = \sqrt{4+\sqrt{11}} + \sqrt{23-2\sqrt{132}}$  și  $b = \sqrt{\sqrt{97+56\sqrt{3}}}$ , atunci  $\frac{b^2-4a}{b-a} \in \mathbb{N}$ .

□ 34. Dacă  $a = \sqrt{8-2\sqrt{15}} - \sqrt{8+2\sqrt{15}}$ , să se calculeze  $(a+2\sqrt{3})^{2004}$ .

□ 35. Dacă  $n = \sqrt{5+\sqrt{24}} - \sqrt{8-\sqrt{5-\sqrt{24}}}$ , să se calculeze  $n^{2004}$ .

□ 36. Dacă  $\frac{3a-4b}{a+2b} = \sqrt{\frac{6,4(4)-0,2(7)+2,8(3)}{2,6(6)+4,(4)}}$ , să se calculeze 27% din numărul  $\frac{20a}{b}$ .

□ 37. Să se raționalizeze numitorii fracțiilor:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{2}{\sqrt{5}}; & \text{b) } \frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{7}}}; & \text{c) } \frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{3}}}; \\ \text{d) } \frac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{10}}; & \text{e) } \frac{1}{6\sqrt{2}-9}; & \text{f) } \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}-1}}; \\ \text{g) } \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}; & \text{h) } \frac{1}{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}; & \text{i) } \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}. \end{array}$$

□ 38. Să se scrie sub formă mai simplă expresiile:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{\sqrt{15}+\sqrt{12}+\sqrt{5}+2}{\sqrt{15}-\sqrt{12}+\sqrt{5}-2}; & \text{b) } \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{6}-2}{2+\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{6}}; \\ \text{c) } \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{4+\sqrt{7}}}{\sqrt{14}+\sqrt{10}+\sqrt{8}}; & \text{d) } \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}}. \end{array}$$

□ 39. Să se scrie sub formă mai simplă expresiile:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \frac{4x(x+\sqrt{x^2-1})^2}{(x+\sqrt{x^2-1})^4-1}, x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]; \\ \text{b) } \left( \frac{\sqrt{x+1}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \right)^2 \cdot \left( \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} - \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{x}, x \neq 0, x \geq -1; \\ \text{c) } \frac{a\sqrt{2} + \sqrt{2ab} + \sqrt{3ab} + b\sqrt{3} - \sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{2a} + \sqrt{3b} - 1}; \\ \text{d) } \frac{a\sqrt{3} - \sqrt{3ab} + \sqrt{2ab} - b\sqrt{2} + \sqrt{a} - \sqrt{b}}{1 + \sqrt{2b} + \sqrt{3a}}; \\ \text{e) } \frac{2x + 2\sqrt{6xy} - 5\sqrt{2x} + 3y - 5\sqrt{3y}}{\sqrt{2x} - 5 + \sqrt{3y}}. \end{array}$$

□ 40. Să se calculeze sumele:

$$\begin{array}{l} \text{a) } S_1 = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}; \\ \text{b) } S_2 = \frac{1}{\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}. \end{array}$$

□ 41. Să se rezolve ecuația  $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} = 20, n \in \mathbb{N}'.$

□ 42. a) Să se arate că are loc egalitatea  $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}+k}{k(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},$

oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$  și  $k \in \mathbb{D} \setminus \{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\}.$

b) Să se calculeze suma:

$$S = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}+1} + \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}+2}{2(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})+1} + \frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n-2}+3}{3(\sqrt{n-1}+\sqrt{n-2})+1} + \dots + \frac{\sqrt{2}-1+n}{n(\sqrt{2}+1)+1}.$$

□ 43. Să se determine mulțimile:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{\frac{4x-5}{x+1}} \in \mathbb{N} \right\};$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x = \sqrt{\frac{5-n}{9}}, n \in \mathbb{N} \right\};$$

$$C = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{\frac{2n+1}{n-3}} \in \mathbb{N} \right\};$$

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \sqrt{\frac{9}{4-n}}, n \in \mathbb{N} \right\} \cap \mathbb{Q};$$

$$E = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \sqrt{\frac{16-3n}{4}}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

□ 44. Să se determine  $x \in \mathbb{Z}$  astfel încât numărul

$$\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{18+8\sqrt{2}} + \sqrt{28-10\sqrt{3}}}{x-2} \in \mathbb{Z}.$$

TESTE DE VERIFICARE

Testul nr. 1

○ 1. Determinați media aritmetică, media geometrică și media armonică a numerelor:

$$A = \frac{\sqrt{7}-1}{(\sqrt{7}+1)(8-2\sqrt{7})} \cdot \left( \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \right);$$

$$B = \frac{\sqrt{16^2+12^2} + \sqrt{16^2-12^2} - \sqrt{16-12}}{18+2\sqrt{28}}.$$

○ 2. Să se demonstreze că oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ , numărul:

$$(2x^2 - 3\sqrt{2}x + 1)(2x^2 + 9 - \sqrt{18}x) + 16 \text{ este pătrat perfect.}$$

○ 3. Să se simplifice fracția  $\frac{(4x^2+x-1)(4x^2+x-5)+4}{(4x^2+x-1)(4x^2+x)-6}.$

○ 4. Să se determine mulțimea  $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{\frac{4x+7}{x+4}} \in \mathbb{N} \right\}.$

Testul nr. 2

○ 1. Fie numerele  $a = \frac{\sqrt{8}+3}{2}$  și  $b = \frac{3\sqrt{2}-4}{2\sqrt{2}}.$  Să se arate că:

a) media aritmetică, media armonică și media geometrică a numerelor a și b nu sunt numere iraționale;

b) media ponderată, cu ponderile 3 și 5, a numerelor a și b este număr irațional.

○ 2. Să se determine mulțimea  $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{x^2+8x+20} \in \mathbb{N} \right\}.$

○ 3. Fie  $a = \sqrt{3-\sqrt{8}}$  și  $b = \sqrt{6-\sqrt{32}}.$

Calculați  $a^{10} + a^9 \cdot b + a^8 \cdot b + \dots + a^2 b - 2b + 1.$

○ 4. Fie x, y, z numere reale strict pozitive. Dacă  $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} = \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y},$  să se arate că  $x = y = z.$

### 1.2. ORDONAREA NUMERELOR REALE

□ 45. Dacă a și b sunt numere reale pozitive, să se arate că:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

□ 46. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}$$

□ 47. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, să se demonstreze că:

- a)  $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ ;
- b)  $a(b^2 + c^2) + b(a^2 + c^2) + c(a^2 + b^2) \geq 6abc$ ;
- c)  $2(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a+b)ab + (b+c)bc + (a+c)ac$ ;
- d)  $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \geq 0$ ;
- e)  $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+ac+bc)$ ;
- f)  $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ ;
- g)  $a^4 + b^4 + 10a^2b^2 \geq 8a^3b + 8ab^3 - 8a^2b^2$ ;
- h)  $8ab(1-ab) \leq (1+a^2)(1+b^2)$ ;
- i)  $(a+b)^4 \leq 8(a^4 + b^4)$ ;
- j)  $a^3 + b^3 + 27 \geq 9ab$ .

□ 48. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, să se arate că:

- a)  $\frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 6$ ;
- b)  $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2$ ;
- c) dacă  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ , atunci  $-\frac{1}{2} \leq ab+ac+bc \leq 1$ .

□ 49. Dacă  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sunt numere reale pozitive cu suma egală cu 1, să se arate că:

- a)  $\sqrt{x_1(x_2 + x_3 + \dots + x_n)} + \sqrt{x_2(x_1 + x_3 + \dots + x_n)} + \dots + \sqrt{x_n(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})} \leq \frac{n}{2}$ ;
- b)  $\frac{x_1x_2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2x_3}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_nx_1}{x_n + x_1} < \frac{1}{2}$ ;

$$\text{c) } \sqrt{\frac{x_2 + x_3 + \dots + x_n}{x_1}} + \sqrt{\frac{x_1 + x_3 + \dots + x_n}{x_2}} + \dots + \sqrt{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{x_n}} < \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)$$

□ 50. Dacă  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sunt numere reale pozitive, să se arate că:

$$\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_1a_3} + \dots + \sqrt{a_1a_n} + \sqrt{a_2a_3} + \dots + \sqrt{a_{n-1}a_n} \leq \frac{n-1}{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

□ 51. Să se demonstreze că dacă a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC, atunci:

- a)  $b(a^2 + c^2) + c(a^2 + b^2) + a(b^2 + c^2) > a^3 + b^3 + c^3$ ;
- b)  $a^2 < 2(b^2 + c^2)$ ;
- c)  $m(\hat{A}) = 90^\circ$  dacă și numai dacă  $\sqrt{2(a+b)} = \sqrt{a+c} + \sqrt{a-c}$ .

□ 52. Să se demonstreze că:

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{a^2 + c^2} \geq \sqrt{2}(a+b+c), \text{ oricare ar fi } a, b, c > 0.$$

□ 53. Să se demonstreze că oricare ar fi  $a \geq 1$  are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} > 2\sqrt{a+1} - 2\sqrt{a}$$

□ 54. Fie a, b, c numere reale pozitive. Să se arate că:

- a) dacă  $a+b+c=1$ , atunci  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$ ;
- b) dacă  $a+b+c=1$ , atunci  $ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}$  și  $abc \leq \frac{1}{27}$ ;
- c) dacă  $abc=1$ , atunci  $a+b+c \geq 3$ .

□ 55. Să se demonstreze că:

- a)  $\sqrt{25x^2 - 20x + 20} + \sqrt{y^2 - 6\sqrt{2}y + 19} > 5, \forall x, y \in \mathbb{R}$ ;
- b)  $\sqrt{4x^2 + 8x + 85} + \sqrt{5x^2 + 10x + 69} + \sqrt{6x^2 + 12x + 55} \geq 18, \forall x \in \mathbb{R}$ ;
- c)  $\sqrt{x^2 + 4x + 31} + \sqrt{4y^2 + 8y^2 + 29} + \sqrt{9z^2 + 12z + 53} > 15, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ .

□ 56. Fie x, y, z numere reale pozitive astfel încât  $x+y+z=xyz$ . Să se arate că  $36 \leq 4(xy+yz+xz) \leq 9+x^2y^2z^2$ .

□ 57. Să se demonstreze că:

$$\sqrt{x(y+z)} + \sqrt{y(x+z)} + \sqrt{z(x+y)} \leq \sqrt{2}(x+y+z), \forall x, y, z \in (0, +\infty)$$

- 58. Dacă  $x, y, z$  sunt numere reale pozitive, să se arate că:  
 $x(y+1) + y(z+1) + z(x+1) \geq 6\sqrt{xyz}$ .
- 59. Dacă  $x$  este număr real pozitiv, să se demonstreze că:  
 a)  $\sqrt{x} \leq \frac{1+x}{2}$ ;                      b)  $\sqrt{\frac{1-x}{x}} \leq \frac{1}{2x}$ .
- 60. Dacă  $a, b, c$  sunt numere reale astfel încât  $a+b+c=1$ , atunci:  
 $\sqrt{3a+1} + \sqrt{3b+2} + \sqrt{3c+3} \leq 6$ .
- 61. Dacă  $a, b, c, d$  sunt numere pozitive astfel încât  $a+b+c+d=1$ , să se arate că  $\sqrt{8a+1} + \sqrt{8b+1} + \sqrt{8c+1} + \sqrt{8d+1} < 8$ .
- 62. Să se arate că:  
 a)  $\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{12}}{7} + \frac{\sqrt{20}}{9} + \frac{\sqrt{30}}{11} + \frac{\sqrt{42}}{13} < 3$ ;  
 b)  $\frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{20}}{9} + \frac{\sqrt{42}}{13} + \dots + \frac{\sqrt{2n(2n+1)}}{4n+1} < \frac{n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- 63. Se consideră numerele pozitive  $a_1, a_2, \dots, a_n$  cu produsul egal cu 1. Să se demonstreze că:  $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq 2^n$ .
- 64. Se consideră numerele reale pozitive  $a$  și  $b$ . Să se demonstreze inegalitatea:  $\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- 65. Să se demonstreze că pentru  $\forall a \in \mathbb{D}$  are loc relația:  $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geq 2$ .
- 66. Fie  $x, y, z, t \in (0, +\infty)$ .  
 Să se arate că  $\frac{x}{x+z+t} + \frac{y}{x+y+t} + \frac{z}{x+y+z} + \frac{t}{y+z+t}$  nu este număr natural.
- 67. Să se compare numerele reale  $a, b, c$  știind că  $a=2$ ,  $b=3x-1$ ,  $c=5-x$ , iar  $x \in \mathbb{R}$ .
- 68. Să se determine numerele  $x, y, z \in \mathbb{N}$  știind că este verificată inegalitatea  $xyz + x + y + z \leq xy + xz + yz + 1$ .
- 69. Fie  $a, b, c$  lungimile laturilor triunghiului ABC care verifică relația:  $\sqrt{a^2-12a+40} + \sqrt{b^2-6\sqrt{3}b+28} + \sqrt{c^2-6c+25} \leq 7$ . Să se determine lungimile laturilor triunghiului și măsurile unghiurilor acestuia.

TESTE DE VERIFICARE

Testul nr. 1

- 1. Fie  $a, b, c, d$  numere reale. Să se arate că:  
 $2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \leq 3(a^2+b^2+c^2+d^2)$ .
- 2. Fie  $S_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2^6-1} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3^6-1} + \dots + \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{n^6-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .  
 a) Să se arate că  $\frac{1}{k^2-k+1} - \frac{1}{k^2+k+1} = \frac{2k}{(k^2-k+1)(k^2+k+1)}$ .  
 b) Să se arate că  $S_n < \frac{1}{6}$ .
- 3. Determinați minimul expresiei:  $5x^2 + 18y^2 - 12xy - 2x - 24y + 20$ .
- 4. Să se arate că pentru orice numere  $a, b, c \in (0, +\infty)$  are loc inegalitatea:  
 $\frac{\sqrt{a}}{(a+b)(a+c)} + \frac{\sqrt{b}}{(b+a)(b+c)} + \frac{\sqrt{c}}{(c+a)(c+b)} \leq \frac{3}{4\sqrt{abc}}$ .

Testul nr. 2

- 1. Fie  $a, b, c$  numere reale pozitive. Să se arate are loc inegalitatea:  
 $\frac{1}{a^2+2} + \frac{1}{b^2+2} + \frac{1}{c^2+2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{\sqrt{abc}}$ .
- 2. Să se arate că  $a(a-4)(a^2-8a+12)+16 \geq 0$ ,  $\forall a \in \mathbb{D}$ .
- 3. Fie  $a$  și  $b$  două numere reale oarecare. Să se demonstreze că:  
 a)  $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$ ;  
 b) dacă  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  și  $a+b+c+d-2=0$ , atunci  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 1$ .
- 4. Să se determine numerele reale  $a$  și  $b$  știind că verifică relația:  
 $\left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(\sqrt{b} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right) \geq 2\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$  și  $a \geq 1, 0 < b \leq 1$ .

### 1.3. MODULUL UNUI NUMĂR REAL

□ 70. Să se calculeze:

a)  $\left| -3\frac{4}{7} - |-5| + 2 \right| - \frac{3}{7}$ ;

b)  $|2\sqrt{2} - 3| - |-\sqrt{2}| + 3 \cdot |1 - \sqrt{2}|$ ;

c)  $|4\sqrt{3} - 8| - |3 - \sqrt{3}| + |5 - 3\sqrt{3}|$ ;

d)  $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| + 5|2 - \sqrt{3}| + |1 - \sqrt{2}| - 3|-3|$ .

□ 71. Să se efectueze:

a)  $\sqrt{22 - 12\sqrt{2}} + \sqrt{17 - 12\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}}$ ;

b)  $\sqrt{21 - 12\sqrt{3}} - \sqrt{52 - 30\sqrt{3}} - \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ ;

c)  $\sqrt{76 - 32\sqrt{3}} + \sqrt{16\sqrt{3} + 28} - 4\sqrt{-6\sqrt{2} + 11}$ ;

d)  $\sqrt{7 - 2\sqrt{10}} + 2\sqrt{13 - 2\sqrt{30}} + \sqrt{17 - 4\sqrt{15}} - \sqrt{40}$ .

□ 72. Care număr nu este întreg:

a)  $\sqrt{30 - 12\sqrt{6}} + 2\sqrt{4 - \sqrt{12}} - \sqrt{27 - 18\sqrt{2}}$ ;

b)  $\sqrt{11 - \sqrt{96}} + \sqrt{14 - 4\sqrt{6}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ ;

c)  $3\sqrt{8 - \sqrt{48}} + \sqrt{43 - 30\sqrt{2}} + \sqrt{25 - 4\sqrt{6}}$  ?

□ 73. Să se determine numerele reale care verifică egalitățile:

a)  $|x| = 36$ ; b)  $|a| = -16$ ; c)  $|-b| = |-81|$ ; d)  $|y - \sqrt{5}| = |\sqrt{5} - 8|$ ;

e)  $|3z - 4| = 0$ ; f)  $|\sqrt{2}x + \sqrt{3}| = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$ ; g)  $\left| \frac{x-1}{2} + \frac{3x-2}{4} \right| = 2$ ;

h)  $|(5x - 35)(y - 6)| = 0$ ; i)  $|x^2 - 1| + |2x - 4| = 0$ ;

j)  $|4x^2 - 12x + 9| + |1 + 25y^2 + 10y| = 0$ .

□ 74. Să se găsească numerele întregi care verifică egalitățile:

a)  $\left| \frac{x-1}{2} + \frac{2(x-1)}{3} - \frac{5x}{6} + 0,8(3) \right| = \frac{7}{3}$ ;

b)  $|(x+4)(x+2) - (x+1)^2| = 3$ ;

c)  $|(3-x)(x+3) + (2-x)^2| = 5$ ;

d)  $\left| \left(2x - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 3x\left(x - \frac{1}{9}\right) \right| = \frac{11}{4}$ ;

e)  $\left| (\sqrt{2}x - 1) - (x\sqrt{3} - 1) \right| = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ ;

f)  $|(x+2)^3 - (x-1)^3| = 27$ ;

g)  $\left| \frac{1}{1-2x} \right| = \left| \frac{6}{16x^3 - 2} \right|$ .

□ 75. Folosind proprietățile modului unui număr real să se determine numerele reale care verifică:

a)  $|x - 3| \leq 0$ ; b)  $|3x - 4| < 0$ ; c)  $|2x + 8| < 2$ ; d)  $|6 - 5x| - 2 \leq 0$ ;

e)  $|8x^2 + 5x - 11| \geq 0$ ; f)  $|15 - 3x| > 0$ ; g)  $|3x^2 - 7x + 2| \leq 0$ ; h)  $|2x - 5| > 1$ ;

i)  $|-12x - 2| \geq 2$ ; j)  $|x^3 + x + 1| + |x^6 + 10| \leq 0$ .

□ 76. Să se rezolve inecuațiile pe mulțimea specificată:

a)  $\left| \frac{4n+1}{n} - 4 \right| > \frac{1}{3}, n \in \mathbb{N}$ ;

b)  $\left| \frac{n-3}{2n-1} - \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{6}, n \in \mathbb{Z}$ ;

c)  $\left| 2 + \frac{3-2n^2}{n^2+2} \right| \geq \frac{1}{10}, n \in \mathbb{Z}$ ;

d)  $\left| 3 - \frac{1+3n^2}{n^2+1} \right| \leq \frac{1}{15}, n \in \mathbb{Z}, |n| \leq 10$ ;

e)  $\left| \frac{2^n+3}{2^n+1} - 1 \right| \leq \frac{2}{17}, n \in \mathbb{Z}$ ;

f)  $\left| \frac{3^{n+1}+4}{3^n+2} - 3 \right| \geq \frac{2}{29}, n \in \mathbb{Z}$ ;

g)  $\left| \frac{4 \cdot 5^n + 1}{5^n + 2} - 4 \right| \geq \frac{7}{123}, n \in \mathbb{N}$ ;

h)  $\left| 3 \cdot 2^n + \frac{1-3 \cdot 4^n}{2^n+1} \right| \geq \frac{14}{5}, n \in \mathbb{Z}$ .

□ 77. Să se rezolve ecuațiile:

a)  $\frac{3|x-5}{2} - \frac{5|x+1}{4} = \frac{2|x+6}{8} - \frac{|x-2}{2}$ ;

b)  $\frac{2|x+1|+5}{6} - \frac{3}{5} \cdot |x+1| = \frac{3|x+1|-2}{15} - \frac{|x+1|+10}{30}$ ;

c)  $\frac{|-x-2|}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - 1 = (\sqrt{2}-1)|x+2| + \sqrt{3}$ ;

d)  $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} \cdot |3x-1| - \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{4-2\sqrt{3}} \cdot |1-3x|$ ;

e)  $\sqrt{4x^2-16x+16} + 5(|2-x|-1) = 9$ ;

f)  $2(4x-3)^2 - 5|3-4x| + 3 = 0$ ;

g)  $3\left(3\sqrt{(4+5x)^2} + 2\right) = 50x(x+2) - 20(x-1)$ .

□ 78. Să se rezolve inecuațiile:

a)  $|x-1| \cdot (7-|x+4|) \geq 0$ ;      b)  $|2x+3| \cdot (|4x+1|-7) < 0$ ;

c)  $(|3x+1|-11) \cdot |x+3| \leq 0$ ;      d)  $\frac{|3x-2|-3}{|3x-1|} \leq 0$ ;

e)  $|4x-5|(|x-\sqrt{2}|-2) < 0$ ;      f)  $\frac{|2x-7|}{2-|4x-1|} < 0$ ;

g)  $\frac{|x^2-4|}{|2x-5|-3} \leq 0$ .

□ 79. Să se determine  $x \in \mathbb{N}$  și  $n \in \mathbb{N}'$  știind că  $x + |x-4| + 2^n = 36$ .

□ 80. Dacă  $a \in \mathbb{N}$  și  $b \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ , să se scrie sub formă mai simplă expresia:

$$\sqrt{25a^2} - \sqrt{\frac{b^2}{4^{-2}}} + \sqrt{\frac{1}{(a+1)^{-2}}} - \sqrt{(2a+1)^2} - \sqrt{(b-a)^2}.$$

□ 81. Dacă  $-2 \leq b \leq -1$ , să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{(b+1)^2} - \sqrt{(b+2)^2} + \sqrt{(3-2b)^2} = \sqrt{(b-3)^2}.$$

□ 82. Dacă  $x < 0$  să se rezolve ecuația:

$$|x^2+8| - |3x-2| - \sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(2-x)^2} - \sqrt{x^4} - \sqrt{(-2x)^2} = 0.$$

□ 83. Fie  $x, y \in \mathbb{R}$  astfel încât  $|3y-2x-6| \leq 5$  și  $|3x-4y+1| \leq 2$ . Să se arate că  $-12 \leq y-x \leq 2$ .

□ 84. Fie  $x, y, z \in \mathbb{R}$  astfel încât  $4x^2 + y^2 + 9z^2 - 4(x+y) - 3(1+2z) = 0$ . Să se determine cea mai mică valoare a lui  $x$  și cea mai mare valoare a lui  $y$ .

□ 85. Fie  $x_i \in \mathbb{R}$  și  $\alpha_i \in \{-1, 0, 1\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Să se arate că:

$$|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|.$$

□ 86. Să se demonstreze că  $|a+b+c| \cdot |a-b+c| \leq b^2 + (a+c)^2$ ,  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ .

□ 87. Dacă  $a, b \in \mathbb{R}$ , să se arate că:

a)  $|a+b| + |a-b| \leq 2\sqrt{a^2 + b^2}$ ;

b)  $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$ .

□ 88. Dacă  $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , să se demonstreze că:

$$\left| \frac{a-b}{c} \right| + \left| \frac{b-c}{a} \right| + \left| \frac{c-a}{b} \right| \geq \left| \frac{a-b}{c} \right| \cdot \left| \frac{b-c}{a} \right| \cdot \left| \frac{c-a}{b} \right|.$$

□ 89. Dacă  $a, b, c$  sunt numere reale pozitive, să se arate că:

$$(ab+bc+ca) \cdot \left| 1 - \frac{1}{abc} \right| \leq \left| ab - \frac{1}{c} \right| + \left| bc - \frac{1}{a} \right| + \left| ac - \frac{1}{b} \right|.$$

□ 90. Dacă  $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , să se demonstreze că:

a)  $(|a|+|b|+|c|) \left( \frac{1}{|a|} + \frac{1}{|b|} + \frac{1}{|c|} \right) \geq 9$ ;

b)  $|a+b| \cdot \left| 1 - \frac{1}{ab} \right| + |b+c| \cdot \left| 1 - \frac{1}{bc} \right| + |a+c| \cdot \left| 1 - \frac{1}{ac} \right| \leq 2 \left( \left| a - \frac{1}{a} \right| + \left| b - \frac{1}{b} \right| + \left| c - \frac{1}{c} \right| \right)$ .

□ 91. Dacă  $a, b \in \mathbb{R}$  să se arate că:

$$2(|a+b|+|ab|) \leq (|a|+|b|)(|a|+|b|+2).$$

□ 92. Dacă  $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , să se demonstreze că:

$$\frac{1}{|a|} + \frac{1}{|b|} + \frac{1}{|c|} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{|abc|}.$$

□ 93. Pot fi adevărate simultan inegalitățile:

$$|x| < |y-z|; |y| < |z-x|; |z| < |x-y|?$$

□ 94. Fie  $a > 0$  și  $x, y, z \in \mathbb{R}$  astfel încât  $|x| < \frac{1}{a}$ ,  $|y| < \frac{1}{a}$ ,  $|z| < \frac{1}{a}$ .

Să se demonstreze că:

a)  $\left| \frac{x+y}{1+a^2xy} \right| < \frac{1}{a}$ ;

b)  $\left| \frac{x+y+z+a^2xyz}{1+a^2(xy+xz+yz)} \right| < \frac{1}{a}$ .

TESTE DE VERIFICARE

Testul nr. 1

○ 1. Să se determine soluțiile întregi în cazurile:

a)  $\frac{2(5|x|-1)}{15} - \frac{16|x|+13}{10} = \frac{1}{3} - \frac{2|x|+3}{2}$ ;

b)  $\frac{|10x+1|}{3-|6x-4|} \geq 0$ ;

c)  $\left| 4 - \frac{1+4x^2}{x^2+3} \right| \geq \frac{1}{2}$ .

○ 2. Fie  $x, y, z \in \mathbb{R}$  care verifică egalitatea:

$x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 2x - 12y + 6z + 10 = 0$ . Să se arate că  $\frac{1}{3} \leq x + y + z \leq 4$ .

○ 3. Să se calculeze valoarea expresiei  $\sqrt{(a+3)^2 + (3b^2)} + \sqrt{\frac{3}{2}(a-5)^2 + (b-2)^2}$  știind că  $a - 4b + 3 = 0$  și  $0 \leq b \leq 2$ .

○ 4. Fie  $a, b, c \in \mathbb{R}^*$  și  $a + b + c = 0$ .

Să se demonstreze că  $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \frac{1}{|a|} + \frac{1}{|b|} + \frac{1}{|c|}$ .

Testul nr. 2

○ 1. Fie  $x, y \in \mathbb{R}$  astfel încât  $|x| < \frac{1}{2}$  și  $|y| < \frac{1}{2}$ . Să se arate că  $\left| \frac{x+y}{1+4xy} \right| < \frac{1}{2}$ .

○ 2. Fie  $a, b, c \in \mathbb{R}^*$  și  $(a+b)(a+c)(b+c) \neq 0$ . Să se demonstreze inegalitatea

$\left| \frac{a}{b+c} \right| + \left| \frac{b}{a+c} \right| + \left| \frac{c}{a+b} \right| > 1$ .

○ 3. Să se rezolve ecuația  $\sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(x-4)^2} = 8$  pentru  $2 \leq x \leq 4$ .

○ 4. Fie numerele  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x \in [-1, 2]$  și  $2y - x = 1$ . Să se determine valoarea expresiei  $E = \sqrt{(x+1)^2} + |x-2| + \sqrt{3(2y-3)^2 + (x-2)^2} + \sqrt{x^2 + 12y^2 + 2x + 1}$ .

1.4. APROXIMĂRI PRIN LIPSĂ SAU PRIN ADAOS

□ 95. Să se scrie aproximările zecimale prin lipsă cu o eroare de  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$  și  $10^{-4}$  pentru numerele:

a) 2,403571; 0,873134; -2,413256; -4,89317;

b)  $\frac{5}{8}$ ;  $\frac{65}{6}$ ;  $\frac{1232}{12}$ ;  $-\frac{2005}{15}$ ;  $-\frac{5249687}{10^5}$ ;  $-\frac{8214}{10^3}$ ;

c)  $\sqrt{5}$ ;  $-\sqrt{5}$ ;  $\sqrt{8}$ ;  $-\sqrt{8}$ ;  $3,44 + \pi$ .

□ 96. Să se scrie aproximările zecimale prin adaos cu o eroare mai mică decât  $10^{-1}$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{-4}$  pentru numerele:

a) 2,34215; 4,02872; -3,25712; -0,68149;

b)  $\frac{20240}{24}$ ;  $-\frac{2140238}{10^5}$ ;  $-245,5381 \cdot 10^{-2}$ ;  $\frac{25}{12}$ ;  $-\frac{425}{27}$ ;  $-\frac{50}{7}$ ;

c)  $4\sqrt{2}$ ;  $3\pi$ ;  $-\sqrt{15}$ ;  $-\sqrt{125}$ .

□ 97. Să se determine trunchierile de ordinul 2 și 3 pentru numerele: 4,245982; -6,465248;  $-\sqrt{10}$ ;  $\frac{352}{6}$ ; 4,2(41).

□ 98. Să se determine rotunjirile la a doua și la a treia zecimală a numerelor:  $\sqrt{6}$ ;  $\sqrt{8}$ ;  $\frac{390}{17}$ ;  $\frac{802}{13}$ ;  $\frac{427}{6}$ ;  $\frac{40239152}{10^6}$ .

□ 99. Se consideră numărul real  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803398\dots$  (numărul de aur).

Să se determine:

a) aproximările zecimale prin lipsă și prin adaos cu o eroare mai mică decât  $10^{-n}$ ,  $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ ;

b) trunchierile de ordin  $n$ ,  $n \in \{4, 5, 6, 7\}$ ;

c) rotunjirile la a n-a zecimală,  $n \in \{2, 3, 5, 7\}$ .

□ 100. Stabiliți dacă:

a) 180 este o aproximare prin lipsă cu o eroare mai mică decât  $10^{-1}$  pentru  $\frac{10442}{58}$ ;

b) 100 este o aproximare prin lipsă cu o eroare mai mică decât  $10^{-2}$  pentru  $\frac{10501}{105}$ .

□ 101. Fie  $a \in \mathbb{Q}_+$ , o aproximare pentru  $\sqrt{3}$ . Să se demonstreze că numărul  $\frac{a+3}{a+1}$  este o aproximare „mai bună” a lui  $\sqrt{3}$ .

□ 102. Fie  $b \in \mathbb{Q}_+$ , o aproximare pentru  $\frac{\sqrt{7}}{3}$ . Să se demonstreze că numărul  $\frac{9b+7}{9(b+1)}$  este o aproximare „mai bună” a numărului  $\frac{\sqrt{7}}{3}$ .

□ 103. Care dintre numerele  $r \in \mathbb{Q}_+$  și  $\frac{2r+7}{2(r+1)}$  este o aproximare mai bună pentru numărul  $\frac{\sqrt{14}}{2}$ ?

□ 104. Numărul  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_+$  este o aproximare pentru  $\sqrt{5}$ . Să se arate că  $\left| \frac{a+5b}{a+b} \right| \leq \left| \sqrt{5} - \frac{a}{b} \right|$ .

□ 105. Fie  $a \in (0, +\infty)$ .

a) Să se arate că  $a < \sqrt{2} < \frac{2}{a}$  sau  $\frac{2}{a} < \sqrt{2} < a$ .

b) Se consideră numerele reale  $a_1 = \frac{1}{2} \left( a + \frac{2}{a} \right)$ ;  $a_2 = \frac{1}{2} \left( a_1 + \frac{2}{a_1} \right)$ ; ...;  $a_{10} = \frac{1}{2} \left( a_9 + \frac{2}{a_9} \right)$ . Să se arate că dacă  $1 \leq i < j \leq 10$  atunci  $a_j$  este o aproximare „mai bună” decât  $a_i$  pentru  $\sqrt{2}$ .

### 1.5. PARTE ÎNTREGĂ. PARTE FRAȚIONARĂ

□ 106. Să se calculeze partea întreagă și partea fracționară a numerelor:

a) 3,28; 4,(24); -3,1(5);  $2\frac{5}{6}$ ;  $4\frac{7}{3}$ ;  $-3\frac{2}{3}$ ;  $-5\frac{3}{2}$ ;  $-\frac{2435}{18}$ ;

b)  $\sqrt{8}$ ;  $1 + \sqrt{5}$ ;  $1 - \sqrt{6}$ ;  $-\sqrt{12}$ ;  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ;  $\sqrt{\frac{435}{15}}$ ;

c)  $\frac{3}{\sqrt{2}}$ ;  $\frac{4}{\sqrt{2}-1}$ ;  $\frac{1}{4\sqrt{3}-7}$ ;  $\sqrt{9-4\sqrt{2}}$ ;  $-\sqrt{57-28\sqrt{2}}$ .

□ 107. Să se calculeze partea întreagă și partea fracționară a numerelor:

a)  $(2,1)^2$ ;  $(-1,1)^4$ ;  $(-3,2)^3$ ;

b)  $(\sqrt{2}+1)^2$ ;  $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2$ ;  $(\sqrt{2}-1)^3$ .

□ 108. a) Dacă  $x - [\sqrt{3}] + \{1,1(6)\} = \sqrt{3} + \left\{ \frac{1}{2} \right\} + \{4,(3)\}$ , să se determine  $[x]$ ,  $\{x\}$ ,  $[5x]$ .

b) Dacă  $y + \sqrt{5} - \{2,8(3)\} - [\sqrt{5}-8] = \left\{ \frac{5}{3} \right\} + \{7,0(6)\} + \{3 + \sqrt{5}\}$ , să se determine  $\{y\}$ ,  $[y]$ ,  $[6y]$ .

□ 109. Se consideră numerele  $A = \sqrt{n+2\sqrt{n-1}}$ ,  $B = \sqrt{n-2\sqrt{n-1}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ . Să se calculeze  $\{A-B\}$ ,  $[B-A]$  și  $\left[ \frac{B}{A} \right]$ .

□ 110. Se consideră numărul  $a_n = \frac{5}{1 \cdot 2} + \frac{9}{2 \cdot 3} + \frac{15}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{n^2 - n + 3}{(n-1)n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ . Să se determine  $[a_n]$  și  $\{a_n\}$ .

□ 111. Se consideră numărul  $b_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n+4)(n+5)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Să se determine  $n$  astfel încât  $\{b_n\} = 0,99875$ .

□ 112. Să se calculeze partea întreagă a numerelor:

a)  $\sqrt{n^2 + n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;                      b)  $\sqrt{n^2 + 3n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;

c)  $\sqrt{n^2 + 6n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;                      d)  $\sqrt{n^2 + 5n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;

e)  $\sqrt{4n^2 + n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

□ 113. Să se calculeze partea întreagă a numerelor:

a)  $(\sqrt{2} + \sqrt{2n^2 + 1})^2$ ;      b)  $(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2$ .

□ 114. Să se verifice egalitatea:  $[\sqrt{1 \cdot 2}] + [\sqrt{2 \cdot 3}] + \dots + [\sqrt{50 \cdot 51}] = 1275$ .

□ 115. Să se demonstreze că pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$  numărul:

$[\sqrt{n^2 + 1}] + [\sqrt{n^2 + 2}] + \dots + [\sqrt{n^2 + n}]$  este pătrat perfect.

□ 116. Să se arate că:

a)  $[\sqrt{1 \cdot 2}] + [\sqrt{2 \cdot 3}] + \dots + [\sqrt{n^2 + n}] = \frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{N}^*$ ;

b)  $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{n^2 - 1}] = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}$ .

□ 117. Se consideră numărul:

$A = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{100^2}\right), n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ .

Să se determine  $\{A\}, [A], [8A], \{16A\}$ .

□ 118. Se consideră numărul:

$a = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}(\sqrt{1} + \sqrt{2})} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}(\sqrt{2} + \sqrt{3})} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}$ .

a) Să se scrie sub formă restrânsă și să se calculeze  $[a], \{a\}$ .

b) Să se determine  $n \in \mathbb{N}$  pentru care  $\{a\} = \frac{4}{5}$ .

• □ 119. Se consideră numărul  $x = \sqrt{9n^2 + 3n}, n \in \mathbb{N}^*$  și  $y = \sqrt{4n^2 + n}, n \in \mathbb{N}^*$ .

a) Să se determine  $[x]$  și să se dovedească faptul că  $\{x\} < \frac{1}{2}$ .

b) Să se determine  $[y]$  și să se arate că  $\{y\} < \frac{1}{4}$ .

□ 120. Să se determine numărul  $\overline{xy}$  știind că  $[\sqrt{xy}] = 6$  și  $x + y = 6$ .

□ 121. Demonstrați că pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$  au loc inegalitățile:

a)  $[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1$ ;

b)  $[x] - [y] - 1 \leq [x - y] \leq [x] - [y]$ .

□ 122. Să se demonstreze că:

a)  $[xy] \geq [x] \cdot [y]$  dacă  $x, y \in [0, +\infty)$ ; (generalizare)

b)  $[xy] \leq [x] \cdot [y]$ , dacă  $x, y \in (-\infty, 0]$ .

□ 123. Să se demonstreze că pentru oricare numere  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  are loc inegalitatea:

$[x_1] + [x_2] + \dots + [x_n] \leq [x_1 + x_2 + \dots + x_n] \leq [x_1] + [x_2] + \dots + [x_n] + n - 1$ .

□ 124. Să se arate că:

a)  $n[x] \leq [nx] \leq n[x] + n - 1, \forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ ;

b)  $n[-x] \leq [-nx] \leq -n[x], x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ ;

c)  $\frac{n(n+1)}{2} \cdot [x] \leq [x] + [2x] + \dots + [nx] \leq \frac{n(n+1)}{2} \cdot [x] + \frac{n(n-1)}{2}$ .

□ 125. Să se demonstreze că:

a)  $\{\{x\}\} = \{x\}, \forall x \in \mathbb{R}$ ;

b)  $\{-x\} = 1 - \{x\}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ;

c)  $\{1 - \{x\}\} = 1 - \{x\}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

□ 126. Să se demonstreze că:

a)  $[n] + [-n] = 0 \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z}$ ;

b)  $[n - a] = n - [a] - 1, \forall n \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ;

c)  $[n - a] = \{-a\} = 1 - \{a\}, \forall n \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

□ 127. Să se demonstreze că pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  are loc egalitatea:

$\frac{[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}]}{[\sqrt{4n+2}]} + \frac{[\sqrt{4n+2}]}{[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}]} = 2$ .

□ 128. Să se rezolve ecuațiile:

a)  $[x + 1] = 4$ ; b)  $[3x - 6] = 7$ ; c)  $[x] + [x + 1] + [x + 2] = x + \frac{5}{2}$ ;

d)  $[x] + [x - 3] = 1 + [x + 4]$ ; e)  $[x] = 2 - x$ ; f)  $[2x] = x + \frac{1}{2}$ ;

g)  $\left[\frac{x+13}{6}\right] = \frac{x+20}{7}$ ; h)  $\left[\frac{x+1}{3}\right] = x - 2$ ; i)  $\left[\frac{x+1}{2}\right] = \frac{x+2}{3}$ ;

j)  $\left[\frac{3x-1}{2}\right] = x + 2$ ; k)  $\left[\frac{x-5}{4}\right] = \frac{x-10}{3}$ ; l)  $\left[\frac{3x+4}{5}\right] = \frac{4x+3}{5}$ ;

$$\text{m) } \left[ \frac{x^2 - 5x + 2}{3} \right] = \frac{x-5}{3}; \quad \text{n) } 7[x]^2 - 8[x] + 1 = 0; \quad \text{o) } \left[ \frac{2x+1}{3} \right] = \left[ \frac{3x+1}{4} \right];$$

$$\text{p) } \left[ \frac{x^2 - 1}{2} \right] = \left[ \frac{x^2 + 1}{3} \right]; \quad \text{r) } \left[ \frac{2x+1}{3} \right] + \left[ \frac{4x+5}{6} \right] = \frac{5x+1}{3}.$$

□ 129. Să se rezolve în  $\mathbb{Q}$  ecuațiile:

$$\text{a) } 4x^4 - 4[x^2] + 1 = 0; \quad \text{b) } x^6 - 16[x]^3 + 64 = 0.$$

□ 130. Să se rezolve ecuația  $[5x^2 - 10x - 12] = [-5x^2 + 10x - 12]$ .

□ 131. Să se arate că pentru oricare  $n \in \mathbb{N}$ , numărul:

$$f(n) = \left[ \frac{n^2}{3} \right] + \left[ \frac{(n+1)^2}{3} \right] + \left[ \frac{(n+2)^2}{3} \right] \text{ este pătrat perfect.}$$

□ 132. Să se arate că pentru oricare  $n \in \mathbb{N}$ , numărul:

$$f(n) = \left[ \frac{n^2}{5} \right] + \left[ \frac{(n+1)^2}{5} \right] + \left[ \frac{(n+2)^2}{5} \right] + \left[ \frac{(n+3)^2}{5} \right] + \left[ \frac{(n+4)^2}{5} \right] \text{ este pătrat perfect.}$$

□ 133. Să se arate că pentru oricare  $n \in \mathbb{N}$ , au loc egalitățile:

$$\text{a) } \left[ \frac{n^2 + n}{2} \right] + \left[ \frac{n^2 + 3n + 2}{2} \right] = (n+1)^2;$$

$$\text{b) } \left[ \frac{n^2 + n}{4} \right] + \left[ \frac{n^2 + 3n + 2}{4} \right] + \left[ \frac{n^2 + 5n + 6}{4} \right] + \left[ \frac{n^2 + 7n + 12}{4} \right] = (n+2)^2.$$

□ 134. Să se demonstreze că pentru  $n \in \mathbb{N}^*$ , are loc egalitatea:

$$\left[ \frac{1}{2} \right] + \left[ \frac{2}{2} \right] + \left[ \frac{3}{2} \right] + \dots + \left[ \frac{n}{2} \right] = \left[ \frac{n}{2} \right] \cdot \left[ \frac{n+1}{2} \right].$$

□ 135. Se consideră  $n, p \in \mathbb{N}^*$  și  $f(n, p) = \left[ \frac{n^2}{p} \right]$ .

a) Să se arate că  $f(n, 3) + f(n+1, 3) + f(n+2, 3)$  este pătrat perfect pentru oricare  $n \in \mathbb{N}^*$ .

b) Să se arate că pentru oricare  $n \in \mathbb{N}^*$ , numărul:  
 $f(n) = f(n, 2) + f(n+1, 2)$  nu este pătrat perfect.

c) Să se arate că dacă numărul  $f(n) = f(n, p) + f(n+1, p) + f(n+2, p)$  este pătrat perfect pentru oricare  $n \in \mathbb{N}^*$ , atunci  $p = 3$ .

□ 136. Să se arate că pentru oricare numere  $n, p \in \mathbb{N}^*$  are loc egalitatea:

$$\left[ \frac{n}{p} \right] + \left[ \frac{n+1}{p} \right] + \dots + \left[ \frac{n+p-1}{p} \right] = n.$$

□ 137. Să se determine numerele naturale  $p$  pentru care:

$$\left[ \frac{n}{p} \right] + \left[ \frac{n+1}{p} \right] + \left[ \frac{n+2}{p} \right] = n, \text{ pentru oricare } n \in \mathbb{N}.$$

□ 138. Să se determine numerele naturale  $p, q, r$  pentru care:

$$\left[ \frac{n}{p} \right] + \left[ \frac{n+1}{q} \right] + \left[ \frac{n+2}{r} \right] = n, \text{ pentru oricare } n \in \mathbb{N}.$$

□ 139. Fie  $f(n) = an^2 + bn + c$ ,  $a, b, c \in \mathbb{N}$ ,  $a \neq 0$ . Să se determine  $a, b, c$  în cazurile:

$$\text{a) } \left[ \frac{f(n)}{2} \right] + \left[ \frac{f(n+1)}{2} \right] = (n+1)^2, \forall n \in \mathbb{N};$$

b)  $\left[ \frac{f(n)}{2} \right] + \left[ \frac{f(n+1)}{2} \right]$  este pătrat perfect pentru oricare  $n$  număr natural;

$$\text{c) } \left[ \frac{f(n)}{4} \right] + \left[ \frac{f(n+1)}{4} \right] + \left[ \frac{f(n+2)}{4} \right] + \left[ \frac{f(n+3)}{4} \right] = (n+2)^2, \forall n \in \mathbb{N}.$$

□ 140. Să se determine  $x \in \mathbb{Q}$  pentru care are loc egalitatea:

$$\left[ x + \frac{1}{2} \right] + \left[ x - \frac{1}{2} \right] = [2x].$$

□ 141. Să se demonstreze că pentru oricare  $n \in \mathbb{N}$ , are loc egalitatea:

$$\left[ \frac{n+1}{2} \right] + \left[ \frac{n+2}{2^2} \right] + \left[ \frac{n+2^2}{2^3} \right] + \dots + \left[ \frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right] + \dots = n.$$

### 1.6. OPERAȚII CU INTERVALE DE NUMERE REALE

□ 141. Care dintre următoarele relații sunt adevărate:

- a)  $\frac{1}{3} \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right]$ ; b)  $-5 \notin (-5, 5)$ ; c)  $2 \in (-10, 2]$ ; d)  $4 \notin \left(\frac{19}{5}, \frac{24}{5}\right)$ ;  
 e)  $\sqrt{3} \in (1,73; 1,74)$ ; f)  $-\pi \in (-3,14; -3,141)$ ; g)  $-2,01 \in (-2, 0]$ ;  
 h)  $1,(4) \in \left[\frac{4}{3}, 1,(8)\right]$ ; i)  $\frac{\sqrt{6}}{2} \in (-\infty, 0,(6))$ ; j)  $-2,01 \in [-2,0(2), +\infty)$ ;  
 k)  $3,2(4) \in \left[\frac{146}{47}, \frac{141}{41}\right]$ ?

□ 142. Folosind definiția intervalului de numere reale, să se explicitizeze relațiile:

- a)  $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$ ; b)  $y \in \left(-\frac{3}{4}, 1,(31)\right)$ ; c)  $z \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ; d)  $m \in [2,1; 2(1)]$ ;  
 e)  $n \in (-\infty, 0]$ ; f)  $p \in (-\infty, -4]$ ; g)  $a \in \left(2\frac{1}{3}, +\infty\right)$ ; h)  $b \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ;  
 i)  $c \notin (-3, +\infty)$ ; j)  $d \notin \left(-\infty, -\frac{3}{4}\right)$ ; k)  $e \notin [-1, 4]$ ; l)  $u \notin (-2, 5]$ ;  
 m)  $v \notin (-3,5, 4,8)$ ; n)  $x \notin [a, b]$ ; p)  $y \notin (a, +\infty)$ ; q)  $z \notin (-\infty, 0]$ .

□ 144. Se dau intervalele de numere reale:

$$I = \left[-3, \frac{4}{3}\right]; J = \left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right); K = \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right); L = [1, 6).$$

Să se efectueze operațiile cu intervale:

1. a)  $I \cup J$ ; b)  $J \cup K$ ; c)  $I \cup L$ ; d)  $I \cup K$ ; e)  $J \cup L$ ; f)  $I \cup J \cup K \cup L$ ;  
 2. a)  $I \cap J$ ; b)  $I \cap K$ ; c)  $I \cap L$ ; d)  $J \cap K$ ; e)  $J \cap L$ ; f)  $I \cap K \cap L$ ;  
 g)  $I \cap J \cap K \cap L$ .

□ 145. Să se determine  $\mathbb{Z} \cap I$  dacă  $I$  este unul dintre intervalele:

$$(-8, -4); [-2, 5); \left(-3,2, \frac{45}{10}\right]; \left[\frac{25}{3}, \frac{19}{2}\right]; \left(-\frac{29}{6}, -\frac{540}{3102}\right);$$

$$(-5\sqrt{17}, -4\sqrt{3}); \left(-\sqrt{122}, -\frac{\sqrt{443}}{5}\right); \left(-4\pi, \frac{5\pi}{3}\right).$$

□ 146. Efectuați reuniunile:

- a)  $(-2, 3] \cup \left[3, \frac{7}{2}\right)$ ; b)  $(-4, 1) \cup \{-4, 1\}$ ; c)  $[7, 10] \cup (-3, 7)$ ;  
 d)  $[-3,4; 1] \cup \left[-3,8; \frac{1}{2}\right)$ ; e)  $[-3,(12); \sqrt{2}] \cup (-3,1(2); 1,4)$ ;

$$f) (-\pi, -\sqrt{3}) \cup [-\sqrt{10}; 1,74); g) \left[-\frac{14}{23}, \frac{15}{47}\right] \cup \left[-\frac{15}{47}, \frac{14}{23}\right];$$

$$h) (-\infty, -2,1(3)) \cup \left[-5, 2\frac{1}{3}\right); i) (-\infty, -6) \cup [-10, 0); j) (-2,5) \cup [-1, +\infty).$$

□ 147. Să se determine  $x, y \in \mathbb{R}$  dacă  $x < y$  și:

$$a) [x, y] \cup [-3, 4] = [-5, 7]; b) [x, y] \cup [-6, -3] = [-8, -3].$$

□ 148. Efectuați intersecțiile de intervale:

$$a) \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \cap \left[-\frac{5}{4}, -\frac{1}{3}\right]; b) [-3,(4), 1) \cap [-2\sqrt{3}, 1,0(8)];$$

$$c) (-8, 2) \cap [2, 8); d) \left(-1, \frac{1}{2}\right) \cap \left[\frac{1}{2}, 2\right); e) \left(\frac{41}{43}, 1\right) \cap \left(-1, \frac{42}{41}\right);$$

$$f) (-4, 6) \cap (3, 9) \cap (-1, 7); g) (-\infty, -1) \cap [-3, 1); h) (-\infty, 2) \cap [-3, 10);$$

$$i) (3, +\infty) \cap (-2, 5); j) (-2, +\infty) \cap (-\infty, -1,1).$$

□ 149. Să se efectueze:

$$a) [-4, 15] \cap \{-2, 5, 15\}; b) \left(-4\frac{1}{3}, 5\frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{Z}; c) \left[-1, \frac{1}{3}\right] \cap \mathbb{Z};$$

$$d) \left[-2,5; 7\frac{8}{10}\right] \cap \mathbb{N}; e) \mathbb{R}^+ \cap \left[0, 5\frac{2}{3}\right]; f) \left(-\infty, \frac{32}{10}\right) \cap \mathbb{N};$$

$$g) \left[-4, 4\frac{1}{2}\right] \cap \mathbb{N} \cap \left[\frac{5}{4}, \frac{8}{3}\right]; h) (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) \cap \left(-\frac{54}{11}, +\infty\right);$$

$$i) (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Q}) \cap \left[-1, 1\frac{1}{4}\right]; j) [-2, 2] \setminus \mathbb{Z}; h) [-1, 4] \setminus \mathbb{N}.$$

□ 150. Să se determine numerele reale  $x, y$  în fiecare dintre cazurile:

$$a) [x, y] \cap (1, 3) = \left[2, 2\frac{3}{10}\right];$$

$$b) [-3, y] \cap [x, 4] = [-1, 4];$$

$$c) [x, y] \cap [3, 5] = [3, 5].$$

□ 151. Se consideră intervalele de numere reale:  $I = \left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$ ;  $J = (-3, +\infty)$ ;

$K = (-2, 2)$ ;  $L = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ . Să se calculeze:

$$a) I \setminus J; I \setminus K; I \setminus L; J \setminus I; K \setminus I; L \setminus I; J \setminus K; L \setminus J;$$

$$b) C_I(K); C_I(L); C_K(L); C_J(K); C_K(K); C_K(I); C_K(J); C_K(L);$$

$$c) C_K(I \cup J); C_K(I \cap J); C_K(K \cup L); C_K(I \cap K); C_K(I \setminus K); C_K(C_K(L)).$$

- 152. Se dau intervalele de numere reale  $I = [-3, 2]$  și  $J = [-1, 4]$ .
- a) Să se calculeze  $C_{\mathbb{R}}(I \cup J)$ ,  $C_{\mathbb{R}}(I) \cap C_{\mathbb{R}}(J)$  și să se compare mulțimile obținute.
- b) Să se calculeze  $C_{\mathbb{Z}}(I \cap J)$ ,  $C_{\mathbb{Z}}(I) \cup C_{\mathbb{Z}}(J)$  și să se compare mulțimile obținute.
- 153. Fie intervalele de numere reale  $I = \left[-\frac{5}{3}, 3\right]$  și  $J = \left[-\frac{3}{a}, 5\right]$ , unde  $a \in \mathbb{N}^*$ .
- a) Să se determine  $I \cap J$ ,  $I \cup J$ ,  $I \setminus J$ ,  $J \setminus I$ .
- b) Să se evalueze în funcție de numărul de elemente mulțimea  $K \cap \mathbb{Z}$ , unde  $K = I \cap J$ .
- 154. Fie numerele reale pozitive  $a$ ,  $b$  și intervalele de numere reale  $I = (-\infty, \sqrt{ab})$ ;  $J = \left(\frac{2ab}{a+b}, \frac{a+b}{2}\right)$ . Să se determine  $I \cap J$ ,  $I \cup J$ ,  $I \setminus J$ ;  $J \setminus I$ .
- 155. Se consideră intervalul  $I_n = \left[2 + \frac{1}{n}, 5 - \frac{1}{n}\right]$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- a) Să se calculeze  $I_1 \cap I_3$ ;  $I_1 \cap I_4$ ;  $I_2 \setminus I_3$ .
- b) Să se determine  $I_n \cap \mathbb{N}$ .
- 156. Se consideră intervalul  $I_n = \left[2 + \frac{1}{n}, 7 - \frac{1}{n}\right]$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- a) Să se determine  $I_5 \cap [4, 8]$ ;  $I_1 \cup I_2 \cup I_3$ ;  $C_{I_1}(I_2)$ .
- b) Să se arate că  $I_3 \subset I_2 \cap I_1$ .
- c) Să se evalueze mulțimea  $I_n \cap \mathbb{Z}$  în funcție de numărul de elemente.
- 157. Fie intervalul  $I = (a, a^2)$ ,  $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ .
- a) Să se determine  $a$  astfel încât  $I \in I \cap (a, +\infty)$ .
- b) Să se determine  $a$  astfel încât  $I \cap \mathbb{N} = \{3\}$ .
- 158. Fie intervalul  $I = (0, +\infty)$ ,  $a, b \in I$  și  $a < b$ . Să se determine intersecția dintre  $[a, b]$  și intervalul:
- a)  $\left(0, \frac{a+b}{2}\right)$ ; b)  $(\sqrt{ab}, b+1)$ ; c)  $\left(a-1, \frac{2ab}{a+b}\right)$ ; d)  $\left(\frac{a+b\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}, \frac{a+b\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)$ .
- 159. Să se determine  $x$  și  $y$  în cazurile:
- a)  $[-3, y] \cap [x, 4] = [-1, 4]$ ; b)  $[x, y] \cup (-2, 4) = [x, 4]$ ;
- c)  $[x, y] \cap (0, 3) = (0, 3)$ ; d)  $[x, 3] \setminus [y, 4] = [x, y]$ .

- 160. Fie  $x \in (0, +\infty)$ . Să se determine intersecțiile de intervale:
- a)  $[-x, x] \cap [0, x]$ ; b)  $[-x, x] \cap [-x^2, x^2]$ ;
- c)  $[-x, x] \cap [-x^3, x^3]$ ; d)  $\left(-\frac{3}{x}, \frac{2}{x}\right) \cap \left(-\frac{1}{x}, \frac{1}{x}\right)$ ;
- e)  $[-x+1, x+2] \cap [0, x+1]$ ; f)  $[-3x, 4x] \cap [3x, 5x]$ .
- 161. Fie  $a \in (1, +\infty)$ . Să se determine intersecția  $\left(-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right) \cap \left(-\frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^2}\right)$ .
- 162. Să se determine în funcție de  $x$  intersecția intervalelor:
- $I = \left[\frac{x+1}{2}, \frac{3x+2}{4}\right]$ ,  $J = \left[\frac{x-1}{3}, \frac{x+3}{2}\right]$ .
- 163. Se dau mulțimile de numere reale:
- $I = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 2\}$ ;  $J = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+1| \geq 3\}$ ;  $K = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{2} < \left|x - \frac{3}{2}\right|\right\}$ .
- a) Să se explicitizeze mulțimile  $I$ ,  $J$ ,  $K$ .
- b) Să se determine:  $I \cup J$ ,  $J \cup K$ ,  $I \cap K$ ,  $I \cap J$ ,  $I \cap J \cap K$ ,  $I \setminus J$ ,  $K \setminus J$ ,  $\mathbb{R} \setminus J$ ,  $C_{\mathbb{R}}(K)$ ,  $C_{\mathbb{R}}(J)$ .
- 164. Se consideră intervalele de numere reale  $I = [a, b]$  și  $K = [c, d]$ .
- a) Să se determine  $I$  știind că:
- $I \cap \mathbb{Z} = \emptyset$  și  $|a-b+1| = a^2 + b^2 + \frac{a}{2} - 2b + 1\frac{5}{16}$ .
- b) Să se determine  $K$  știind că:
- $\mathbb{Z} \cap K = \{1\}$  și  $|c-d+2| = c^2 + d^2 - 4d + \frac{9}{2}$ .
- c) Să se determine  $I \cap K$ ;  $I \cup K$ ;  $K \setminus I$ ;  $C_{(0,1)}(I)$ ;  $C_{(0,1)}(K)$ .
- 165. Fie  $a > 0$  și intervalele de numere reale  $I = \left(-\frac{1}{a}, a\right)$ ,  $J = (-a, a^2)$  și  $K = I \cap J$ . Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât:
- a)  $K \cap \mathbb{Z}$  are un singur element;
- b)  $K \cap \mathbb{Z}$  are  $n$  elemente,  $n \geq 2$ .

## 2 PROPOZIȚIE. PREDICAT. CUANTIFICATORI

- 1. Care dintre următoarele enunțuri sunt propoziții:
- „Numărul natural 2 este par și prim.”;
  - „Anul 2004 este bisect.”;
  - „Rombul este paralelogram.”;
  - „Comparați numerele  $(3^6)^2$  și  $(2^3)^6$ !”;
  - „Cine a rezolvat exercițiul?”;
  - „ $3(x+1) - 2 = 7, x \in \mathbb{Q}$ ”;
  - „Suma unghiurilor triunghiului ABC este mai mică decât  $180^\circ$ .”?
- 2. Să se determine valoarea de adevăr a propozițiilor:
- „Numerele 4 și 3,2 sunt direct proporționale cu numerele:  
 $1: \frac{0, (981) \cdot 111}{218}$  și  $\frac{3}{1,875}$ .”;
  - „Numerele  $0, (384615) \cdot 5,2$  și  $\frac{0,6}{0,41(6)}$  sunt invers proporționale cu numerele 4 și 5.”;
  - „Prin două puncte din plan trece cel puțin o dreaptă.”;
  - „Diagonalele dreptunghiului sunt congruente și perpendiculare.”;
  - „Medianele unui triunghi nu sunt concurente.”;
  - „Numărul  $\frac{1}{2}$  este soluție a ecuației  $4x^2 - 8x + 3 = 0$ .”.
- 3. Se consideră propozițiile:
- p: „Cel mai mic multiplu comun al numerelor 60, 504, 180 este triplul numărului 840.”;
- q: „Cel mai mare multiplu de 72 mai mic decât 1000 este multiplu de 78.”;
- r: „Doi vectori sunt coliniari dacă au același modul.”;
- s: „Media aritmetică a numerelor  $a = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2005}$ ,  
 $b = 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{2004}{2005}$  este număr par.”.
- Să se determine valorile de adevăr  $v(p)$ ,  $v(q)$ ,  $v(r)$ ,  $v(s)$ .
- 4. Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor:
- „Mulțimea numerelor pare și prime este infinită.”;
  - „ $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{35}} + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{7}}{\sqrt{63}} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ ”;
  - „Numărul  $A = \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} - \sqrt{28-16\sqrt{3}} - \sqrt{3^2 - (\sqrt{6})^2} \in \mathbb{N}$ ”;

- „ $\min(-1,41; -\sqrt{2}; -\frac{7}{5})$  este  $-\sqrt{2}$ ”;
  - „Numerele  $n, \sqrt{n^2+n}, \sqrt{n^2+2n}$ , unde  $n \in \mathbb{N}^*$  au aceeași parte întreagă, egală cu  $n$ ”;
  - „ $1001_{(2)} + 10001_{(2)} + 1000001_{(2)} = 91_{(10)}$ ”;
  - „ $(-1)^1 \cdot (-1)^2 \cdot \dots \cdot (-1)^{2005} > 0$ ”;
  - „ $1 \cdot (-1)^{2004} + 2 \cdot (-1)^{2003} + 3 \cdot (-1)^{2002} + \dots + 2003 \cdot (-1)^2 + 2004 \cdot (-1)^1 = -2004$ ”;
  - „ $(-2)^{159} > -(-3)^{106}$ ”;
  - „ $(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}})^2 + (\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}})^2 \notin \mathbb{Z}$ ”;
  - „ $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2004 \cdot 2005} < 0,91$ ”.
- 5. Să se determine valoarea de adevăr a propozițiilor:
- „Distanța dintre punctele  $A(-2, 4)$  și  $B(4, -4)$  este egală cu distanța dintre punctele  $C(-7, 0)$  și  $D(3, 0)$ ”;
  - „A 500-a zecimală a numărului  $\frac{20}{13}$  este cifra 3.”;
  - „Puterile cu exponent natural ale lui 3 sunt divizibile cu 9.”;
  - „Mediana împarte triunghiul în două triunghiuri cu arii egale.”;
  - „Diagonala paralelipipedului dreptunghic cu dimensiunile exprimate prin cele mai mici numere naturale proporționale cu numerele  $1\frac{1}{3}; 2\frac{1}{2}; 2\frac{1}{3}$  este  $\sqrt{485}$ ”;
  - Un trapez dreptunghic are bazele de 4 cm și 8 cm și unghi un de  $45^\circ$ . Suma pătratelor lungimilor diagonalelor lui este egală cu 102.”;
  - „Fie  $(x, y) \in \left\{ (x, y) \mid x \in \mathbb{D}, x > 1, y \in \mathbb{N}, \frac{x}{3} = \frac{5x+1}{3y+2} \right\}$ .  
 Atunci  $2x + 3y = 18$ ”;
  - „În cubul ABCDA'B'C'D' au loc relațiile  $\overline{AB} + \overline{CC'} + \overline{AD'} = \overline{AC'}$ ,  $\overline{AB} + \overline{CC'} + \overline{B'A'} = \overline{AA'}$  și  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{DD'} + \overline{D'C'} = \overline{B'C'}$ ”;
  - „În triunghiul ABC,  $EF \parallel BC$ ,  $AE = 3$ ,  $AB = 4$  (figura 1). Atunci au loc egalitățile vectoriale:  
 $\overline{EF} = \frac{3}{4} \overline{BC}$  și  $\overline{FC} = \frac{1}{3} \overline{FA}$ ”.

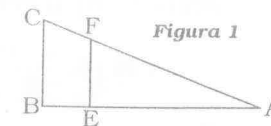


Figura 1

□6. Să se determine mulțimea de adevăr a predicatelor:

- a)  $p_1(x) : „5(x+2) - 2x = 3(5+x) + 7, x \in \mathbb{D}”;$   
 b)  $p_2(x) : „\frac{2}{5}(7x-3) + \frac{3}{2}(2x+1) = \frac{3}{5}(4x-1) - 1 + \frac{3}{2}x, x \in \mathbb{D}”;$   
 c)  $p_3(x) : „\sqrt{7-4\sqrt{3}} \cdot x + \frac{1}{\sqrt{3}} - x = (\sqrt{3})^{-1} - x(\sqrt{3}-1), x \in \mathbb{Q}”;$   
 d)  $p_4(x) : „-2,4(x-5) + 5,2(x-4) = 4(0,95x-2,2), x \in \mathbb{D}”.$

□7. Să se determine mulțimea de adevăr a predicatelor:

- a)  $„p_1(x) : \left(x + \frac{x}{2} - 1\right)^2 - \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2 = (x-1)(2x+2), x \in \mathbb{Z}”;$   
 b)  $p_2(x) : „(2+x)^3 - 2(x+1)^3 - (x^2+2) = x(3-x)(x+3), x \in \mathbb{N}”;$   
 c)  $p_3(x) : „\sqrt{3}(\sqrt{3}-x) + 2(x+1) = \frac{x}{2+\sqrt{3}} + 5, x \in \mathbb{Z}”;$   
 d)  $p_4(x) : „(2x+\sqrt{3}-1)^2 - (x+2\sqrt{3})^2 - (3x-1)(x+3) = (1-\sqrt{3})^2 + 3, x \in \mathbb{D}”.$

□8. Să se determine mulțimea de adevăr a predicatelor:

- a)  $p_1(x) : x^3 + (1+\sqrt{3})x^2 + \sqrt{3}x = 0, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}”;$   
 b)  $p_2(x) : „\frac{(x+1)^3}{3} - \frac{(x-3)^3}{2} = \frac{8-x^3+12x^2}{6}, x \in \mathbb{D}”;$   
 c)  $p_3(x) : „(x-1)^3 + 2x(1+2x) + 15 = (x+2)^3, x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}”;$   
 d)  $p_4(x) : „(x^2+x+1)(x^2+x+2) = 12, x \in \mathbb{Z}”;$   
 e)  $p_5(x) : „(x^2-3x+1)(x^2-3x-3) = 5, x \in \mathbb{N}”;$   
 f)  $p_6(x) : „x^2 + \frac{7}{6}x + \frac{42}{6x^2+7x+18} = 5, x \in \mathbb{Q}”.$

□9. Să se determine universul predicatului și mulțimea de adevăr a predicatului:

- a)  $p_1(x) : „\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}, x \in E”;$   
 b)  $p_2(x) : „\frac{3-x}{3+x} - 1 = \frac{2-x}{2+x} + \frac{1-x}{1+x}, x \in E”;$   
 c)  $p_3(x) : „\frac{x}{x-1} = \frac{2x+3}{x+4} - \frac{x^2+x+1}{1-x^3}, x \in E”;$   
 d)  $p_4(x) : „\frac{x}{2x-3} - \frac{15}{2x^2-3x} = \frac{5}{x}, x \in E”.$

□10. Să se determine universul predicatului și mulțimea de adevăr a predicatelor:

- a)  $p_1(x) : „\frac{6}{x^2-1} + \frac{2}{x-1} = 2 - \frac{x+4}{x+1}, x \in E”;$   
 b)  $p_2(x) : „\frac{x+2}{x^2-4x+4} : \frac{x^3-8}{x^3-6x^2+12x-8} = \frac{1}{3}, x \in E”;$   
 c)  $p_3(x) : „\frac{(x^2+1)^2 - (x^2-1)^2}{x^2-1} : \left(\frac{2}{x+\frac{1}{x}} + \frac{2}{x-\frac{1}{x}}\right) = \frac{2x+1}{x}, x \in E”;$   
 d)  $p_4(x) : „\left[\frac{x-1}{x+1}\right]^2 + 1 + \frac{2x-2}{x+1} : \frac{16x^2}{(x+1)^3} = \frac{x+1}{x-3}, x \in E”.$

□11. Să se determine mulțimea de adevăr a predicatelor:

- a)  $p_1(x) : „|6x^2 - 5x - 6| + |2x + 3x^2| = 0, x \in \mathbb{D}”;$   
 b)  $p_2(x) : „|x| = -x, x \in \mathbb{D}”;$   
 c)  $p_3(x) : „\frac{2}{5} \cdot |2x-1| - 3 \cdot |2-4x| + 5 = \frac{-|3-6x|}{5}, x \in \mathbb{Z}”;$   
 d)  $p_4(x) : „\frac{|x+3|}{|x-2|} + \frac{|x-2|}{|x+3|} = 4\frac{1}{4}, x \in \mathbb{D}”;$   
 e)  $p_5(x) : „7x^2 - 9|x| - 10 = 0, x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}”;$   
 f)  $p_6(x) : „\sqrt{4x^2 - 12x + 9} - 6|3-2x| + 15 = 0, x \in \mathbb{Q}”.$

□12. Să se determine mulțimea de adevăr a predicatelor:

- a)  $p_1(x) : „|4x^2 + 1|(3 - |2x + 5|) \geq 0, x \in \mathbb{D}”;$   
 b)  $p_2(x) : „|x+6|(|3x-7|-8) \leq 0, x \in \mathbb{Z}”;$   
 c)  $p_3(x) : „\frac{|5x-4|-6}{|3x+8|} \geq 0, x \in \mathbb{D}”;$   
 d)  $p_4(x) : „\frac{|x^2-25|}{|6x-7|-11} \leq 0, x \in \mathbb{Z}”.$

□13. Să se determine mulțimea de adevăr a predicatelor:

- a)  $p_1(x) : „[2x+3] = 5, x \in \mathbb{D}”;$   
 b)  $p_2(x) : „\left[\frac{x-1}{3}\right] = \frac{x+1}{4}, x \in \mathbb{D}”;$   
 c)  $p_3(x) : „[3x] - 5 \cdot \{2,1(6)\} = [5,(6)] + \{-2,8(3)\}, x \in \mathbb{D}”;$   
 d)  $p_4(x) : „4[x^2] - 9[x] + 6 = 0, x \in \mathbb{D}”.$

□ 14. Să se determine mulțimea de adevăr a predicatelor:

a)  $p_1(x): „\frac{15}{2x+1} \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{Z}”;$

b)  $p_2(x): „\left[\frac{x}{2+x} - \frac{x+2}{x} - \frac{x^2}{x(x+2)}\right] \cdot \left(\frac{2+x}{2-x} - \frac{2-x}{2+x}\right) \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{Z}”;$

c)  $p_3(n): „\frac{(-1)^n \cdot 53 + 9n - 1}{18} \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}”;$

d)  $p_4(n): „\frac{1 \ln^2 + 4}{2n+3} \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}”.$

□ 15. Să se determine mulțimea de adevăr a predicatelor binare:

a)  $p_1(x, y): „(x-3)(y+2) = 8; (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}”;$

b)  $p_2(x, y): „(x-1)(y+1) = 14; x > y, (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}”;$

c)  $p_3(x, y): „(3x^2 + 4x - 4)^2 + (y^2 - 36)^2 = 0, x, y \in \mathbb{R}”;$

d)  $p_4(x, y): „|x+5y-17| + |3x-4y+6| = 0, x, y \in \mathbb{R}”;$

e)  $p_5(x, y): „(2x+y+2)\sqrt{2} + (4x+y+5)\sqrt{7} = 0, x, y \in \mathbb{Q}”.$

□ 16. Se consideră predicatele unare:

$p(x): „1, (6)x - 0, 1(6) = 4x + 2\frac{1}{6}, x \in \mathbb{R}”;$

$q(y): „(y+1)^2 + 2(y-3)^2 - (y-4)^2 = y^2 - 2(1-2y), y \in \mathbb{R}”.$

a) Să se determine propozițiile:

$p\left(\frac{1}{2}\right); p(2); p(-2); p(\sqrt{3}); q(1); q(-3); q(2); q(5); q(\sqrt{2})$  precizând va-

loarea de adevăr a acestora.

b) Să se determine mulțimea de adevăr a fiecărui predicat.

c) Ce valoare de adevăr au propozițiile:

$(\exists x)p(x), (\forall x)p(x); (\exists y)q(y); (\forall y)q(y)?$

□ 17. Fie predicatul  $p(n): „\frac{2n+7}{n+1} \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}”.$

a) Să se precizeze valoarea de adevăr a propozițiilor:

$p(0), p(2), p(4), \exists x \in \mathbb{Z}$  astfel încât  $p(x) \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ .

b) Să se determine mulțimea de adevăr a predicatului.

□ 18. Fie predicatul unar  $p(x): „\frac{x(x-7)}{3} - 1 = \frac{11x}{10} - \frac{x-4}{3}, x \in \mathbb{R}”.$

Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor:

$(\exists x)p(x); (\forall x)\neg p(x); (\exists x)\neg p(x).$

□ 19. Fie predicatul binar  $p(a, b): „\sqrt{(a+b+5)^2} + \sqrt{(a+b-9)^2} \in \mathbb{Z}, a, b \in \mathbb{R}”.$

a) Determinați propozițiile  $p\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right); p(1, -2); p\left(-\frac{3}{5}, 1,6\right)$  și valorile

lor de adevăr.

b) Să se precizeze valoarea de adevăr a propozițiilor:  $(\exists a)(\exists b)p(a, b);$

$(\forall a)(\forall b)p(a, b), (\exists a)(\forall b)p(a, b).$

c) Să se verifice că propoziția:

$(\forall a) a \in (-2, 5), (\forall b) b \in (-3, 4)p(a, b) \in \mathbb{N}$  este propoziție adevărată.

□ 20. Se consideră predicatele binare:

$p(x, y): „x^2 + y^2 - 4y + 16 > 0, x, y \in \mathbb{R}”;$

$q(a, b): „a^2 - 2ab + 5b^2 = 4b - 1, a, b \in \mathbb{R}”.$

Ce valoare de adevăr au propozițiile:

a)  $(\forall x)(\forall y)p(x, y); (\exists x)(\exists y)p(x, y); (\exists x)(\exists y)\neg p(x, y);$

b)  $(\exists a)(\exists b)q(a, b); (\forall a)(\forall b)\neg q(a, b); (\exists a)(\forall b)\neg q(a, b)?$

□ 21. Să se determine valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) „ $\forall n \in \mathbb{N}, 54 \cdot 3^{n-2} - 21 \cdot 3^{n-1} + 8 \cdot 3^{n-3} + 13 \cdot 3^n : 19$ ”;

b) „ $\forall n \in \mathbb{Z}, (n^2 - 3n + 1)(n^2 - 3n + 3) + 1$  este pătrat perfect”;

c) „ $\exists n \in \mathbb{Z}, \sqrt{5}(\sqrt{5} - n) + 4(n - 3) = \frac{n}{2 - \sqrt{5}} - 1$ ”;

d) „ $\exists n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, \frac{4n^2 + 3n - 1}{3n + 1} \in \mathbb{Z}$ ”;

e) „ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \sqrt{2\sqrt{1-n(2-n)} + \sqrt{4+8n+4n^2}} n^{-1} \in \mathbb{N}$ ”;

f) „ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \sqrt{n - \sqrt{2n-1}} + \sqrt{n + \sqrt{2n-1}} \in (\sqrt{4n-3}, \sqrt{4n-1})$ ”.

□ 22. Să se determine valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) „ $(\exists x)(\exists y), 3xy - 2y - 12x + 50 = 0, x, y \in \mathbb{Z}$ ”;

b) „ $(\exists m)(\forall n), m^2 + n^2 + 3m - 1 > 0, m, n \in \mathbb{Z}$ ”;

c) „ $(\forall x)(\forall y)(\forall z), x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 2(x+6y) - 6(z-2) \geq 1, x, y, z \in \mathbb{R}$ ”;

d) „ $(\forall x)(\forall y)(\forall z), (x+y)(x+z) \geq (x + \sqrt{yz})^2, x, y, z \in [0, +\infty)$ ”;

e) „ $\forall x, y, z \in (0, +\infty), (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$ ”.

TESTE DE VERIFICARE

Testul nr. 1

○ 1. Care dintre următoarele enunțuri sunt propoziții și care sunt predicate?

- a) „Numerele 2, 14, 24 sunt direct proporționale cu numerele 0,(3); 2,(3); 4.”;
- b) „Ecuatia  $4(x-2) + 5x(x+2) = x-16$  are soluția  $x = -1$ .”;
- c) „ $(x+2)^2 + (y-3)^2 = z^2$ ,  $x, y, z \in \mathbb{R}$ ”;
- d) „ $2^{x+2} = 2^5$ ,  $x \in \mathbb{N}$ ”;
- e) „Oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(1+n)^2 \geq 4$ ”.

○ 2. Să se determine valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a)  $p$ : „ $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $(-1)^{n+1} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 0, (407) \cdot (-1)^n - 16 = -\frac{143}{9}$ ”;
- b)  $q$ : „ $\exists x, y, z \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{x}{y} = \frac{z}{3,5}$  și  $x$  este prim”.

○ 3. Să se determine mulțimea de adevăr a predicatului:  
 $p(x, y, z)$ : „Măsurile  $x, y, z$  ale unghiurilor unui triunghi sunt proporționale cu 2, 10 și 12”.

Testul nr. 2

○ 1. Să se determine valoarea de adevăr a propozițiilor:

$p$ : „Numărul  $a = \frac{-9^{n+1} + 225 \cdot 15^{2n}}{625^{n+1} - 25^{n+1}}$ ;  $\left(\frac{3}{5}\right)^{2n+1}$  este subunitar.”;

$q$ : „ $2\sqrt{10-2\sqrt{21}} + \sqrt{(3-2\sqrt{3})^2 - \sqrt{53-20\sqrt{7}}} \notin \mathbb{N}$ ”.

○ 2. Să se determine mulțimea de adevăr a predicatelor:

a)  $p(n)$ : „ $\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{4n^2+4n+1} - 2 = \sqrt{2\sqrt{3}+4} + \sqrt{n^2+6n+9}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ”;

b)  $q(x, y)$ : „ $|8,8(3)x - 12,(4)y + 59| + |2,5x - 13,(2)y + 104| = 0$ ,  $x, y \in \mathbb{I}$ ”.

○ 3. Se consideră predicatul  $p(n)$ : „ $\frac{(-1)^{3n+5}(6n-9)-1}{4} \in \mathbb{I}$ ,  $n \in \mathbb{I}$ ”.

Să se precizeze valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a)  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $p(n)$ ;
- b)  $\exists n \in \mathbb{N}$ ,  $p(n)$ ;
- c)  $\exists n \in \mathbb{I}$ ,  $p(n)$  este falsă.

3

OPERAȚII LOGICE ELEMENTARE CORELATE CU OPERAȚII ȘI RELAȚII CU MULȚIMI

3.1. OPERAȚII LOGICE ELEMENTARE CU PROPOZIȚII FORMULE DE CALCUL PROPOZIȚIONAL

□ 1. Se consideră propozițiile:

$p$ : „Există un număr întreg  $x$  astfel încât  $3x^2 + 5x - 2 = 0$ .”;

$q$ : „Există un număr real  $x$  astfel încât  $|x+2| + |x^2-4| = 0$ .”.

Să se stabilească valorile de adevăr ale propozițiilor:

- a)  $p, q, p \vee q, \neg p, \neg q, \neg(p \vee q), \neg(p \vee q), p \vee \neg q$ ;
- b)  $p \wedge q, \neg p \wedge \neg q, \neg(p \wedge q), \neg p \wedge q, p \wedge \neg q$ ;
- c)  $p \rightarrow q, \neg p \rightarrow \neg q, \neg p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q, \neg(p \rightarrow q), \neg q \rightarrow \neg p$ ;
- d)  $p \leftrightarrow q, \neg p \leftrightarrow \neg q, p \leftrightarrow \neg q, \neg p \leftrightarrow q, (p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ .

□ 2. Se consideră propozițiile:

$p$ : „Oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ ,  $(3x^2 - 4x + 2)(6 - 4x + 3x^2) + 5 > 0$ .”;

$q$ : „Oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|3x^2 + 2x + 1| + |x - 3| \neq 0$ .”.

Să se stabilească valorile de adevăr ale propozițiilor:

- a)  $p, q, p \vee q, \neg p, \neg q, \neg(p \vee q), \neg p \vee \neg q$ ;
- b)  $p \wedge q, \neg(p \wedge q), \neg p \wedge \neg q, \neg(p \vee q) \wedge (p \wedge q), \neg(p \wedge q) \wedge (p \vee q)$ ;
- c)  $p \rightarrow q, \neg p \rightarrow \neg q, \neg q \rightarrow \neg p, \neg(p \rightarrow q), (p \vee q) \rightarrow (p \wedge q), \neg(p \wedge q) \rightarrow \neg p \vee \neg q, \neg(p \vee q) \rightarrow \neg p \wedge \neg q$ ;
- d)  $p \leftrightarrow q, \neg p \leftrightarrow \neg q, \neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg(p \wedge q), \neg p \wedge q \leftrightarrow \neg q \wedge p$ .

□ 3. Se consideră propozițiile:

$p$ : „În hexagonul ABCDEF are loc relația  $\overline{FB} + \overline{BC} = \overline{CF}$ .”

$q$ : „În triunghiul ABC are loc relația  $2\overline{BM} = \overline{BC} + \overline{BA}$ , unde M este mijlocul laturii [AC].”

Să se stabilească valorile de adevăr ale propozițiilor  $p, q$  și ale propozițiilor compuse obținute din aceste propoziții ca la exercițiul anterior.

□ 4. Se consideră propozițiile:

$p$ : „Există numerele reale  $x$  și  $y$  astfel încât  $|x-2| + 3y^2 + y + 5 = 0$ .”;

$q$ : „Oricare ar fi  $x \in (0, +\infty)$  are loc relația  $2x - 4 < 0$ .”;

$$r: \sqrt{\frac{19}{10} + \frac{6}{\sqrt{10}}} + \sqrt{\frac{19}{10} - \frac{6}{\sqrt{10}}} = 2.$$

Să se determine valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a)  $p, q, r, p \vee q \vee r, \neg p \vee \neg q \vee \neg r, \neg(p \vee r) \vee r, p \vee \neg(p \vee r);$   
 b)  $p \wedge q \wedge r, p \wedge r, q \wedge r, p \wedge q, \neg p \wedge \neg q \wedge r, \neg(p \wedge q) \wedge r;$   
 c)  $(p \rightarrow q) \rightarrow r, (r \rightarrow q) \rightarrow p, (q \rightarrow r) \rightarrow p, (p \wedge q) \leftrightarrow \neg r, (p \vee q \vee r) \leftrightarrow r;$   
 d)  $(p \vee q) \wedge (p \vee r), p \vee (q \wedge r), p \wedge (q \vee r), (p \wedge q) \vee (p \wedge r), (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r).$

□5. Să se arate că următoarele formule de calcul propozițional sunt tautologii:

- a)  $\neg(p \wedge \neg p)$  (principiul noncontradicției);  
 b)  $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q;$   
 c)  $((p \vee q) \wedge \neg q) \rightarrow p$  (modus tollendo ponens);  
 d)  $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$  (modus tollendo tolens);  
 e)  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q);$   
 f)  $\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \neg q$  (legea negării implicației);  
 g)  $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$  (legea silogismului);  
 h)  $p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p;$   
 i)  $p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p;$   
 j)  $((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q;$   
 k)  $(\neg q \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow p.$

□6. Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor  $p$  și  $q$  cunoscând faptul că:

- |  |   |
|--|---|
| a) $p \vee q$ este adevărată;                      | b) $p \vee q$ este falsă;                       |
| c) $p \wedge q$ este adevărată;                    | d) $p \wedge q$ este falsă;                     |
| e) $p \rightarrow \neg p$ este adevărată;          | f) $p \rightarrow (q \wedge p)$ este adevărată; |
| g) $(p \vee \neg p) \rightarrow q$ este adevărată; | h) $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ este adevărată; |
| i) $\neg(p \vee \neg q)$ este falsă;               | j) $\neg q \rightarrow p$ este adevărată.       |

□7. Se consideră intervalele de numere reale  $A = [1, 3]$  și  $B = \left[\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right]$ .

Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor:

$p_1 \wedge p_2, p_1 \vee p_2, p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_1$ , unde:

$$p_1: \left(\frac{20}{9}, \frac{4}{7}\right) \in (A \times B); \quad p_2: \exists x \in A \text{ astfel încât } \left(x - 1, \frac{9}{2}\right) \in A \times A.$$

□8. Să se verifice următoarele echivalențe de formule de calcul propozițional:

- a)  $\left. \begin{aligned} p \vee q &\equiv q \vee p \\ p \wedge q &\equiv q \wedge p \end{aligned} \right\}$  (comutativitatea disjuncției și a conjuncției);  
 b)  $\left. \begin{aligned} p \vee (q \vee r) &\equiv (p \vee q) \vee r \\ p \wedge (q \wedge r) &\equiv (p \wedge q) \wedge r \end{aligned} \right\}$  (asociativitatea conjuncției și a disjuncției);  
 c)  $\left. \begin{aligned} p \vee (q \wedge r) &\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\ p \wedge (q \vee r) &\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \end{aligned} \right\}$  (distributivitatea disjuncției față de conjuncție și a conjuncției față de disjuncție);

d)  $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q \equiv [\neg q \wedge (\neg p \rightarrow q)] \rightarrow p;$

e)  $p \rightarrow \neg q \equiv \neg(p \wedge q);$

f)  $\neg p \rightarrow q \equiv p \vee q;$

g)  $p \vee q \equiv p \wedge p \equiv p;$

h)  $p \wedge q = \neg(\neg p \vee \neg q);$

i)  $p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q);$

j)  $\left. \begin{aligned} \neg(p \vee q) &\equiv \neg p \wedge \neg q \\ \neg(p \wedge q) &\equiv \neg p \vee \neg q \end{aligned} \right\}$  (legile lui De Morgan);

k)  $\neg(p \wedge q \wedge r) \equiv (\neg p) \vee (\neg q) \vee (\neg r), \quad \neg(p \vee q \vee r) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q) \wedge (\neg r).$

□9. Punctele  $A(-1, 1)$  și  $B\left(\frac{1}{2}, 4\right)$  aparțin dreptei  $(d)$ , iar punctele

$C(-1, 2)$  și  $D(1, 0)$  aparțin dreptei  $(\Delta)$ . Se consideră propozițiile:

$p_1$ : „Funcția de gradul I care are curba reprezentativă dreapta  $d$  este crescătoare și funcția de gradul I care are curba reprezentativă dreapta  $\Delta$  este descrescătoare.”;

$p_2$ : „Există punctul  $M(x, y)$  coliniar cu punctele  $A, B$ , dar și cu punctele  $C, D$ .”;

$p_3$ : „Unghiul dreptelor  $AB$  și  $CD$  este nul.”

Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor:

$$p_1, p_2, p_3, p_1 \wedge p_2, p_1 \wedge p_3, p_2 \vee p_3, p_1 \leftrightarrow \neg p_3.$$

□10. Fie predicatul  $r(x, y)$ : „ $x + 3y = 10, x, y \in \mathbb{Q}$ ”. Să se determine valoarea de adevăr a propozițiilor:

a)  $(\exists x)(\exists y)r(x, y);$

b)  $(\forall x)(\exists y)r(x, y) \rightarrow (\exists x)(\forall y)r(x, y);$

c)  $(\exists x)(\forall y)r(x, y) \rightarrow (\forall y)(\exists x)r(x, y).$

□ 11. Se consideră predicatul binar  $p(x, y), q(x, y)$  pe  $\mathbb{D}$ . Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor:

$$(\forall x)(\forall y)(p(x, y) \wedge q(x, y)); (\exists x)(\exists y)(p(x, y) \wedge q(x, y));$$

$$(\exists x)(\exists y)(p(x, y) \vee q(x, y)); (\exists x)(\forall y)\neg p(x, y);$$

$$(\forall x)(\exists y)\neg q(x, y) \text{ știind că:}$$

a)  $p(x, y): „3x + 5y = 9”, q(x, y): „4x - y = -11”;$

b)  $p(x, y): „\frac{3}{2}x - y = -\frac{1}{2}”; q(x, y): „x\overline{799y}8$  se divide cu 4 și 9”;

c)  $p(x, y): „\frac{0,1(2)}{3,3} = \frac{\overline{1y}6}{2x}, \overline{1y}6 : 9”; q(x, y): „x + 152y = 2005”.$

### 3.2. OPERAȚII LOGICE ELEMENTARE CU PREDICATE OPERAȚII ȘI RELAȚII CU MULȚIMI

□ 12. Pe mulțimea  $\mathbb{D}$  se consideră predicatul  $p(x): „(3x + 6)x \geq 0”$  și  $q(x): „3^{x+3} > 9”$ . Să se determine mulțimea de adevăr a predicatelor:

a)  $\neg p(x), \neg q(x);$       b)  $p(x) \vee q(x);$       c)  $p(x) \wedge q(x);$

d)  $p(x) \Rightarrow q(x);$       e)  $q(x) \Rightarrow p(x).$

□ 13. Pe mulțimea  $\mathbb{D}$  se consideră predicatul  $p(x): „10x - 20 < 0”$  și  $q(x): „4^{2-x} > 4^5”$ .

a) Să se determine mulțimile de adevăr ale predicatelor  $p$  și  $q$ .

b) Să se aleagă implicația adevărată dintre:

1.  $p(x) \Rightarrow q(x);$       2.  $q(x) \Rightarrow p(x);$

3.  $\neg p(x) \Rightarrow \neg q(x);$       4.  $\neg q(x) \Rightarrow \neg p(x).$

c) Să se exprime relația de mulțimi asociată implicației adevărate.

□ 14. Să se verifice echivalența de predicat și să se scrie operațiile corespunzătoare cu mulțimi:

a)  $((x < 3) \vee (x \leq -1)) \Leftrightarrow (5 - 3x > x - 7), x \in \mathbb{D};$

b)  $(3x - 1) \wedge (2x > 6) \Leftrightarrow (2 - 3x < -1 - 2x), x \in \mathbb{D}.$

□ 15. Pe  $\mathbb{D}$  se consideră predicatul:

$$p(x): „|x - 2| \leq 3” \text{ și } q(x): „x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)”.$$

Să se verifice următoarele echivalente de predicat și să se scrie operațiile corespunzătoare cu mulțimi:

a)  $p(x) \vee q(x) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5^{x+1}} < 1, x \in \mathbb{D}\right);$

b)  $p(x) \wedge q(x) \Leftrightarrow (-2 \leq 2x - 1 \leq 9, x \in \mathbb{D});$

c)  $\neg p(x) \wedge q(x) \Leftrightarrow x \in (5, +\infty);$

d)  $\neg p(x) \vee \neg q(x) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1).$

□ 16. Pe mulțimea  $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - 2| \leq 4\}$  se consideră predicatul:

$$p(x, y): „x - 3y = 2” \text{ și } q(x, y): x + 2y = 7”.$$

a) Să se formeze predicatul

$$p(x, y) \vee q(x, y), p(x, y) \wedge q(x, y);$$

$$p(x, y) \Rightarrow q(x, y); q(x, y) \Rightarrow p(x, y).$$

b) Să se determine mulțimea de adevăr a predicatelor nou formate și să se scrie operațiile cu mulțimi caracterizate de aceste predicat.

□ 17. Fie mulțimea  $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 7, 9\}$  și predicatul binar:

$$p(x, y): „4x + y = 1”, q(x, y): „16x^2 - y^2 + 4(y + 2x) = 3”.$$

a) Să se determine mulțimile de adevăr ale acestor predicat.

b) Să se verifice dacă  $q(x, y)$  este consecința logică a predicatului  $p(x, y)$ .

c) Este adevărat că  $q(x, y) \Rightarrow p(x, y)$ ?

□ 18. Pe  $\mathbb{N}$  se consideră predicatul binar:

$$p(a, b): „\frac{2,2(6)a + 7b}{-1,625a + 0,625b} \text{ este cubul unui număr rațional.”;$$

$$q(a, b): „a \text{ și } b \text{ sunt invers proporționale cu numerele } 8 \text{ și } 3.”.$$

a) Să se arate că  $q(a, b)$  este consecință logică a lui  $p(a, b)$ .

b) Este  $p(a, b)$  consecință logică a predicatului  $q(a, b)$ ?

□ 19. Fie pe  $\mathbb{Q}$ , predicatul binar  $p(a, b): „\frac{4a - b}{2a + 3b} = \frac{1}{2}”, q(a, b): „a \text{ și } b$  sunt direct proporționale cu numerele 5 și 6.”. Să se demonstreze echivalența  $p(a, b) \Leftrightarrow q(a, b)$ .

□ 20. Să se descrie reuniunea mulțimilor următoare folosind operațiile cu predicat:

a)  $A = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}, B = \{3n + 2 \mid n \in \mathbb{N}\};$

b)  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \mid 1260\}, B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \mid 1170\};$

c)  $A = \left\{a \in \mathbb{Z} \mid \frac{6}{a-2} \in \mathbb{Z}\right\}, B = \left\{b \in \mathbb{Z} \mid \frac{3}{b-5} \in \mathbb{Z} \text{ și } b \text{ divide } 32\right\};$

d)  $A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \overline{3(x+1)}_{(5)} \text{ este pătrat perfect}\right\}, B = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \overline{2xx(5)} < 75\right\}.$

□21. Să se descrie intersecția mulțimilor folosind operații cu predicate:

a)  $A = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, 4x + 3y = 21\}$ ,

$B = \{(x, y) \mid 2xy + y - 2x = 15, x, y \in \mathbb{N}\}$ .

b)  $A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid x = \overline{ab} \wedge \frac{x+2}{5} \in \mathbb{N}\right\}$ ,  $B = \left\{x \in \mathbb{N} \mid x = \overline{ab} \wedge \frac{x+5}{7} \in \mathbb{Z}\right\}$ ;

c)  $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x + [x] = \frac{5}{2}\right\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^3 - x^2 - 3x = 0\}$ ;

d)  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x + 1| \leq 9\}$ ,  $B = \{x \in [0, 1] \mid \{x\}(5 - \{x\}) = 4\}$ .

□22. Să se exprime cu ajutorul operațiilor cu predicate complementarea mulțimii A în raport cu mulțimea B:

a)  $A = \left\{n \in \mathbb{N} \mid \frac{4}{5} < \frac{n}{7} < \frac{21}{23}\right\}$ ,  $B = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{23}{19} > \frac{7}{x} > \frac{2}{3}\right\}$ ;

b)  $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{2}{3-x} \geq 1\right\}$ ,  $B = \left\{n \in \mathbb{N} \mid \frac{n+1}{n-1} \in \mathbb{N}\right\}$ .

□23. Se consideră mulțimile  $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \min\left(3x+1, 4 - \frac{3x}{2}\right) \geq 1\right\}$  și

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid [x-2] < 1\}$  și predicatele unare  $p(x): „x \in A”$ ,  $q(x): „x \in B”$  pe  $\mathbb{Z}$ .

a) Să se demonstreze că  $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ .

b) Să se scrie mulțimile caracterizate de predicatele:

$p(x) \vee q(x)$ ,  $p(x) \wedge q(x)$ ,  $\neg p(x)$ ,  $\neg q(x)$ .

□25. Se consideră mulțimile

$A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \max\left(\frac{53-2x}{3}, 3x+13\right) \geq 15\right\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |5x-1| \leq 19\}$  și

predicatele unare  $p(x): „x \in A”$ ,  $q(x): „x \in B”$ , pe  $\mathbb{Z}$ .

1. Să se verifice dacă:

a)  $p(x) \Rightarrow q(x)$ ; b)  $q(x) \Rightarrow p(x)$ ; c)  $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ .

2. Să se scrie mulțimea care caracterizează predicatele:

$\neg p(x)$ ,  $\neg q(x)$ ,  $p(x) \vee q(x)$ ,  $p(x) \wedge q(x)$ .

□25. Se consideră mulțimile:

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists n \in \mathbb{N}, x^2 + 5x + 1 = n^2\}$  și

$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 + 3x)(x^2 - 13x + 40) = 0\}$  și predicatele

$p(x): „x \in A”$ ,  $q(x): „x \in B”$  pe mulțimea  $\mathbb{Z}$ .

Să se studieze dacă:

a)  $q(x) \Rightarrow p(x)$ ; b)  $p(x) \Rightarrow q(x)$ ; c)  $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ .

□26. Se consideră mulțimea  $E = \left\{x \in \mathbb{D} \mid x = \frac{7n-11}{n+2}, n \in \mathbb{N}\right\}$  și predicatele:

$p(x): „x \in E, x \leq 2”$ ;  $q(x): „x \in E, x < 8”$ ;  $r(x): „x \in E, x \in \mathbb{Z}”$ .

a) Dacă A, B, C sunt mulțimile de adevăr ale predicatelor  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $r(x)$  să se determine  $A, B, C, A \cup B, A \cap B, A \setminus C, C \setminus A, C_B(C), C_B(A)$ .

b) Câte elemente are mulțimea de adevăr a predicatului:

$\alpha(x): „x \in E, x \leq 6,01”$ ?

□27. Se consideră predicatele unare peste  $\mathbb{Q}$ :

$p(x): „x = \frac{3n^2+1}{n^2+n}, n \in \mathbb{N}”$  cu mulțimea de adevăr A și  $q(x): „x \in A, 2 \leq x < 3”$

cu mulțimea de adevăr B. Ce relație există între mulțimile de adevăr ale celor două predicate?

□28. Fie mulțimile  $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{[a]}{a}, a \geq 1\right\}$  și  $B = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$  și predicatele:

$p(x): „x \in A”$ ,  $q(x): „x \in B”$ . Să se arate  $p(x) \Rightarrow q(x)$  și  $q(x) \Rightarrow p(x)$ .

□29. Se consideră pe mulțimea  $E = \{1, 2, 3, 4\}$  predicatele:

$p(x, y): „x + 2y = 6”$  și  $q(x, y): „x(x-6) = 4y(y-3)”$ .

a) Să se verifice dacă  $p(x, y) \Rightarrow q(x, y)$ .

b) Implicația  $q(x, y) \Rightarrow p(x, y)$  este adevărată?

c) Ce relație există între mulțimile de adevăr ale predicatelor date?

□30. Să se demonstreze egalitatea de mulțimi  $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 + 11x - 80 = 0\} = \{y \in \mathbb{Z} \mid y^2 + 11y + 20 \text{ este pătratul unui număr rațional}\}$ .

□31. Să se demonstreze următoarele relații de mulțimi:

a)  $C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B)$ ,  $\forall A, B \subset E$ ;

b)  $C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B)$ ,  $\forall A, B \subset E$ ;

c)  $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cap C) \Leftrightarrow A = \emptyset$ ;

d)  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ,  $\forall A, B$ .

□32. Se consideră mulțimile A, B, C astfel încât:

$A \cup B = A \cup C$  și  $A \cap B = A \cap C$ .

Care dintre următoarele relații este adevărată?

a)  $A, B \subset C$ ; b)  $C \subset B$ ; c)  $C = C_B(A)$ ; d)  $C = B$ .

□33. Se consideră mulțimea  $M$  și  $A, B$  submulțimi ale acesteia. Să se verifice egalitățile de mulțimi:

- a)  $[(A \cup B) \setminus B] \cup (A \cap B) = A$ ;  
 b)  $(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) \cup (\overline{A \cup B}) = M \setminus (A \setminus B)$ ;  
 c)  $(\bar{A} \setminus \bar{B}) \cup (\bar{B} \setminus \bar{A}) \cup (A \cap B) = A \cup B$ , unde  $\bar{A} = C_M(A)$ .

□34. Fie mulțimea  $M$  și  $A, B, C$  submulțimi ale acesteia. Să se verifice egalitățile de mulțimi:

- a)  $[(A \cup B) \setminus C] \cup [(A \cup C) \setminus B] \cup [(B \cup C) \setminus A] = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$ ;  
 b) Dacă  $A, B, C$  sunt mulțimi disjuncte, atunci:  
 $C_M[A \cup C_M(A \cup B)] \cup C_M[B \cup C_M(B \cup C)] \cup C_M[C \cup C_M(C \cup A)] = A \cup B \cup C$ .

### 3.3. REGULI DE NEGARE A PROPOZIȚIILOR UNIVERSALE ȘI A PROPOZIȚIILOR EXISTENȚIALE CONDIȚII NECESARE. CONDIȚII SUFICIENTE

□35. Să se nege propozițiile:

- a) Există un număr natural pătrat perfect care are cifra unităților egală cu 1.“;  
 b) „Există două numere prime consecutive.“;  
 c) „Orice număr prim este număr impar.“;  
 d) „Oricare ar fi  $n$  un număr natural impar,  $n^5 - n : 240$ .“.

□36. Să se scrie propozițiile mai jos cu ajutorul cuantificatorilor. Să se nege și să se stabilească valoarea de adevăr a noilor propoziții:

- a) „Inecuația  $x^2 - 9 < 0$  are cel puțin 4 soluții numere întregi.“;  
 b) „Ecuatia  $12x^2 - 13x + 3 = 0$  are două soluții reale.“;  
 c) „Există  $x \in \mathbb{Q}$  pentru care  $3x^2 + x - 2 \neq 0$ .“;  
 d) „Oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ ,  $-x^2 - 9 \leq 0$ .“;  
 e) „Există  $x \in \mathbb{R}$  astfel încât  $x + [x] = \frac{34}{3}$ .“.

□37. Se consideră mulțimea  $M = \left\{-4, -3, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3, 4\right\}$  și propozițiile:

- $p_1$ : „Oricare  $x \in M$ , există  $y \in M$  astfel încât  $x + y = 0$ .“;  
 $p_2$ : „Există  $x \in M$ , există  $y \in M$  astfel încât  $x - 2y = 0$ .“;  
 $p_3$ : „Există  $x \in M$  astfel încât  $\frac{1}{x^2} \in M$ .“;  
 $p_4$ : „Oricare ar fi  $x \in M$ , există  $y \in M$  astfel încât  $x(y + 2) \leq 6x$ .“.

□38. Să se nege următoarele afirmații precizând valoarea de adevăr a propozițiilor obținute:

- a) „Mulțimea soluțiilor ecuației  $\left[\frac{x+1}{3}\right] = \frac{x-1}{2}$  are patru elemente.“;  
 b) „Oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$  și oricare ar fi  $y \in \mathbb{R}$ ,  $(x-1)^2 + (y-2)^2 \neq 0$ .“;  
 c) „Există  $n \in \mathbb{N}$  astfel încât  $\frac{n+1}{6} - \frac{2}{5}$  este fracție zecimală finită.“;  
 d) „Există  $n \in \mathbb{N}$  astfel încât  $\left|\frac{3n+1}{n} - 3\right| < \frac{1}{5}$ .“;  
 e) „Oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\left|\frac{3n+8}{2n+9} - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{10}$ .“.

□39. Se consideră predicatul  $s(x, y)$ : „ $2x + 3y \leq 5$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ “.

- a) Ce valoare de adevăr au propozițiile:  
 $(\forall x)(\forall y)s(x, y)$ ,  $(\exists x)(\forall y)s(x, y)$ ,  
 $(\forall x)(\exists y)s(x, y)$ ,  $(\exists x)(\exists y)s(x, y)$ ?  
 b) Să se nege propozițiile de mai sus, precizând valoarea de adevăr.

□40. Fie predicatul binare:

$$p(x, y): \frac{7,2x-3y}{3,6x+6y} = -1, x, y \in \mathbb{R}, \quad q(x, y): „18x - 5y = 0, x, y \in \mathbb{R}”.$$

- a) Să se arate că  $p(x, y)$  este consecință logică a predicatului  $q(x, y)$ .  
 b) Să se arate că  $q(x, y)$  este condiție suficientă și necesară pentru predicatul  $p(x, y)$ .

□41. Pe mulțimea  $E = \{1, 2, 3, 4\}$  se consideră predicatul:

$$p(x, y): „2x + y = 6”, \quad q(x, y): „12x + y^2 = 2(3y + 2x^2)”.$$

- a) Să se arate că  $p(x, y)$  este condiție suficientă pentru predicatul  $q(x, y)$ .  
 b) Este adevărat că  $q(x, y)$  este condiție suficientă pentru  $p(x, y)$ ? Dar condiție necesară?

□42. Pe mulțimea  $\mathbb{R}$  se consideră predicatul binare:

$$p(a, b): „a < b \text{ dacă și numai dacă } a^2 < b^2”, \quad q(a, b): „a + b > 0”. \text{ Să se}$$

arate că:

- a)  $p(a, b)$  este condiție necesară și suficientă pentru predicatul  $q(a, b)$ .  
 b)  $q(a, b)$  este condiție suficientă și necesară pentru predicatul  $p(a, b)$ .

□ 43. Se consideră predicatul binare:

$p(a, b)$ : „ $a$  și  $b$  sunt numere de aceeași paritate,  $a, b \in \mathbb{N}^*$ .”;

$q(x, y)$ : „ $x + y$  este număr par,  $x, y \in \mathbb{N}^*$ .”;

$s(x, y)$ : „ $xy$  este număr impar,  $x, y \in \mathbb{N}^*$ .”.

Să se arate că:

a)  $p(x, y)$  este o condiție necesară și suficientă pentru  $q(x, y)$ . Ce reprezintă  $q(x, y)$  pentru  $p(x, y)$ ?

b)  $p(x, y) \wedge s(x, y)$  este condiție suficientă pentru  $q(x, y)$ ;

c)  $p(x, y)$  este condiție necesară pentru predicatul  $s(x, y) \vee q(x, y)$ .

□ 44. Fie predicatul binare:

$p(x, y)$ : „ $x^2y \leq 0$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ ”,  $q(x, y)$ : „ $y < 0$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ ”.

Să se arate că:

a)  $p(x, y)$  este condiție necesară pentru  $q(x, y)$  dar nu este condiție suficientă;

b)  $q(x, y)$  este condiție suficientă pentru  $p(x, y)$ .

□ 45. Fie  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  și predicatul binare:

$p(a, b)$ : „ $a - b = 3$ ,  $a, b \in A$ ”,  $q(a, b)$ : „ $a(a - 3) = b(b + 3)$ ,  $a, b \in A$ ”.

Să se arate că  $p(a, b)$  este condiție necesară și suficientă pentru predicatul  $q(a, b)$ .

□ 46. Pe mulțimea  $\mathbb{D}$  se consideră predicatul binare  $r(x, y)$ : „ $x > 0$ ,  $y > 0$ ” și  $s(x, y)$ : „ $x - y > x + y > xy$ ”. Să se arate că:

a)  $s(x, y)$  este condiție suficientă pentru  $r(x, y)$ ;

b)  $r(x, y)$  este condiție necesară pentru  $s(x, y)$  dar nu este condiție suficientă.

### TESTE DE VERIFICARE

#### Testul nr. 1

○ 1. Să se arate că următoarea formulă de calcul propozițional este tautologie:  $\lceil \lceil q \wedge (p \rightarrow q) \rceil \rightarrow \lceil p \rceil$ .

○ 2. Să se verifice echivalența  $\lceil (\lceil q \wedge (p \rightarrow q) \rceil \rightarrow q) \rceil \equiv \lceil (p \rightarrow q) \wedge p \rceil \rightarrow q$ .

○ 3. Fie predicatul  $p(a, b)$ : „ $a^2 - b^2 = 3$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ ”.

a) Să se determine propozițiile  $p(2, -1)$ ,  $p(0, 1)$ ,  $p(-2, -1)$  și valorile de adevăr ale acestora.

b) Să se determine mulțimea de adevăr a predicatului  $p(a, b)$ .

○ 4. Fie predicatul binar  $p(x, y)$ : „ $2xy - 3y = 0$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ ”. Să se determine valoarea de adevăr a propozițiilor:

$(\forall x)(\exists y)p(x, y)$ ,

$(\exists x)(\forall y)p(x, y)$ ,  $\lceil ((\exists x)(\exists y)p(x, y)) \rceil$ ,  $\lceil ((\forall x)(\forall y)p(x, y)) \rceil$ .

○ 5. Să se neghe propoziția  $A \subset B \setminus C$ .

#### Testul nr. 2

○ 1. Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor  $p$  și  $q$  cunoscând că:

a)  $\lceil p \vee q \rceil$  adevărată; b)  $p \wedge \lceil q \rceil$  falsă;

c)  $\lceil p \rightarrow q \rceil$  adevărată; d)  $p \rightarrow (p \vee q)$  adevărată.

○ 2. Fie predicatul unar  $p(n)$ : „ $\frac{n^3 + 3}{n + 3} \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ”.

a) Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor  $p(1)$ ,  $p(5)$ ,  $p(9)$ .

b) Să se determine mulțimea de adevăr a predicatului.

○ 3. Se consideră mulțimile:

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{(-1)^{5n+1}(6n+9)+1}{4} \in \mathbb{Z} \right\}, B = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{3x+9}{2x+3} \in \mathbb{Z} \right\}$$
 și

predicatul unar  $p(n)$ : „ $n \in A$ ”,  $q(n)$ : „ $n \in B$ ”.

a) Să se determine valoarea de adevăr a propozițiilor:

$p(2) \wedge q(-2)$ ,  $p(5) \vee q(-6)$ ,  $p(12) \rightarrow q(0)$ ,  $q(5) \rightarrow p(5)$ .

b) Să se determine mulțimea de adevăr a predicatelor:

$p(n)$ ,  $q(n)$ ,  $p(n) \wedge q(n)$ ,  $p(n) \vee q(n)$ .

○ 4. Să se demonstreze egalitatea:

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \left\lceil \frac{2x+1}{4} \right\rceil = x-3, \left\lceil \frac{3x-1}{2} \right\rceil = y+3 \right\} = \{(5, 4); (6, 5)\}.$$

○ 5. Să se verifice echivalențele:

a)  $(p \rightarrow q) \rightarrow q \equiv p \vee q$ ;

b)  $\lceil \lceil q \wedge \lceil p \rceil \rceil \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow q$ .

## 4 TIPURI DE RAȚIONAMENTE LOGICE

### 4.1. METODA INDUCȚIEI MATEMATICE

□1. Folosind metoda inducției matematice, să se demonstreze că pentru orice număr natural nenul sunt adevărate egalitățile:

$$a) 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$b) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$c) 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2;$$

$$d) 1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot n^4 = \frac{(-1)^{n-1} n(n+1)(n^2+n-1)}{2};$$

$$e) 1 + (1+2) + (1+2+3) + \dots + (1+2+\dots+n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6};$$

$$f) 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1+2+3+\dots+n)^2;$$

$$g) 2 \cdot 3 + 3 \cdot 8 + \dots + n(n^2-1) = \frac{n(n+1)(n^2+n-2)}{4};$$

$$h) 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3};$$

$$i) 1 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + (2n-1)2n(2n+1) = n(n+1)(2n^2+2n-1);$$

$$j) 1 \cdot 1 \cdot (3) \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot (3) \cdot 3 + \dots + n \left( n + \frac{1}{3} \right) (n+1) = \frac{1}{36} n(n+1)(9n^2+25n+14);$$

$$k) 1 \cdot 1 \cdot 25 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 25 \cdot 3 + \dots + n \left( n + \frac{1}{4} \right) (n+1) = \frac{1}{12} n(n+1)(3n^2+8n+4);$$

$$l) 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \dots + (n-1)n^2 = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12};$$

$$m) 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n+1} n^2 = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2};$$

$$n) 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n+1)}{30}.$$

□2. Să se demonstreze că pentru orice număr natural  $n \in \mathbb{N}^*$  sunt adevărate egalitățile:

$$a) 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k + 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k(k+1) + \dots + n(n+1) \cdot \dots \cdot (n+k-1) = \frac{n(n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot (n+k)}{k+1}, \text{ unde } k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}.$$

$$b) \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \dots + \frac{1}{(k+n-1)(k+n)} = \frac{n}{k(k+n)}.$$

□3. Să se calculeze următoarele sume și să se verifice prin inducție matematică:

$$a) 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n(3n+1);$$

$$b) 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2;$$

$$c) 1^3 + 3^3 + \dots + (2n-1)^3;$$

$$d) 2^2 + 6^2 + \dots + (4n+2)^2;$$

$$e) 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + \dots + n(n+3);$$

$$f) 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2);$$

$$g) 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2)(n+3);$$

$$h) 1 \cdot 1 \cdot (3) + 2 \cdot 2 \cdot (3) + \dots + n \left( n + \frac{1}{3} \right);$$

$$g) 3^3 - 1^2 + 5^3 - 4^2 + \dots + (2n+1)^3 - (3n-2)^2.$$

□4. Să se calculeze și să se verifice formulele găsite prin inducție matematică:

$$a) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)};$$

$$b) \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)};$$

$$c) \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)};$$

$$d) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)};$$

$$e) \frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)};$$

$$f) \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)};$$

$$g) \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \cdot \dots \cdot \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$$

□5. Să se calculeze:

$$a) \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{98 \cdot 99 \cdot 100};$$

$$b) \sum_{k=1}^{100} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)};$$

$$c) \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)};$$

$$d) \sum_{k=1}^n \frac{4k}{4k^4+1}.$$

□6. Să se demonstreze prin inducție matematică egalitățile:

- a)  $\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{5}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2 + 1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+3)}{2(2n+1)}$ ;  
 b)  $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$ ;  
 c)  $\frac{1^4}{1 \cdot 3} + \frac{2^4}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^4}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6(2n+1)}$ ;  
 d)  $\frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} = 1 - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$ ;  
 e)  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{1}{2^{n+1}}$ .

□7. Să se arate că pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$  au loc egalitățile:

- a)  $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right] = \frac{n+2}{2(n+1)}$ ;  
 b)  $\frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \dots \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$ ,  $n \geq 2$ ;  
 c)  $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right] \dots \left[1 - \frac{1}{(2n-1)^2}\right] = \frac{2n-2}{2n-1}$ ;  
 d)  $3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot \dots \cdot (1 + 2^{2^{n-1}}) = 2^{2^n} - 1$ .

□8. Să se arate că pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$  au loc egalitățile:

- a)  $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^5} + \dots + \frac{n}{2^{2n-1}} = \frac{1}{9} \left(8 - \frac{3n+4}{2^{2n-1}}\right)$ ;  
 b)  $\frac{1}{2} - \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} - \frac{4}{2^4} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{2^n} = \frac{1}{9} \left[2 + (-1)^{n+1} \cdot \frac{3n+2}{2^n}\right]$ ;  
 c)  $1 + 2(1+2) + 3(1+2+3) + \dots + n(1+2+\dots+n) = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}$ .

□9. Să se demonstreze inegalitățile:

- a)  $2^n \geq 2n-1$ ,  $n \geq 2$ ;  
 b)  $2^{n+2} \geq 2n+3$ ,  $n \geq 4$ ;  
 c)  $3^{n+1} \geq n^4 + n^2 + 1$ ,  $n \geq 5$ ;  
 d)  $2^n \geq n^2$ ,  $n \geq 5$ ;  
 e)  $2^n \geq n^3$ ,  $n \geq 10$ .

□10. Să se arate că:

- a)  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 < \frac{(2n+1)^3}{6}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;  
 b)  $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 < 2n^4$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;  
 c)  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} \leq n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ;  
 d)  $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} < \frac{n+1}{3n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

□11. Să se demonstreze inegalitățile:

- a)  $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$ ,  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ ;  
 b)  $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

□12. Să se demonstreze că au loc inegalitățile:

- a)  $\sqrt{2} + \sqrt{2 \cdot 3} + \dots + \sqrt{n(n+1)} < n(n+1)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ;  
 b)  $\sqrt{1 \cdot 2} + \sqrt{3 \cdot 4} + \dots + \sqrt{(2n-1) \cdot 2n} < \frac{2n^2+n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ;  
 c)  $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n} \geq \frac{n(\sqrt{n}+1)}{2}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ;  
 d)  $\sqrt{n} < \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ .

□13. Să se ordoneze numerele:

- a)  $\frac{2n\sqrt{n+1}}{3}$ ,  $\frac{2}{3}(n+1)\sqrt{n}$ ,  $(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n})$ , pentru  $n \in \mathbb{N}^*$ ;  
 b)  $\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ ,  $\frac{1}{4n}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{5}{6}$ ,  $\dots$ ,  $\frac{2n-1}{2n}$  pentru  $n \in \mathbb{N}^*$ .

□14. Să se simplifice fracțiile:

- a)  $\frac{\sum_{k=1}^n k^2}{\sum_{k=1}^n k(k+1)}$ ; b)  $\frac{\sum_{k=1}^n k^3}{\sum_{k=1}^n k\left(k + \frac{1}{2}\right)(k+1)}$ .

□15. Să se arate că pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$  au loc inegalitățile:

$$\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} \leq n.$$

□16. Se consideră numerele  $x_i \in [0, +\infty)$ ,  $x_i \geq x_{i+1}$ , pentru  $i = \overline{1, n}$ .

Să se demonstreze că:

$$x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + \dots + (2n-1)x_n^2 \leq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2.$$

□17. Să se determine numerele reale poziție care verifică egalitatea:

$$a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

□18. Să se demonstreze că pentru oricare  $n \in \mathbb{N}$  și  $x \in (-1, +\infty)$  are loc inegalitatea  $(1+x)^n \geq 1+nx$  (*inegalitatea lui Bernoulli*).

□19. Folosind inducția matematică să se arate că pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  au loc relațiile:

- a)  $9^n - 1$  se divide cu 8;
- b)  $n^3 + 5n$  se divide cu 6;
- c)  $13^n + 7^n - 2$  se divide cu 6;
- d)  $3^{2n+1} + 2^{n+2}$  se divide cu 7.

□20. Să se arate că pentru orice număr  $n \in \mathbb{N}$  au loc relațiile:

- a)  $5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} : 19$ ;
- b)  $2^{7n+3} + 3^{2n+1} \cdot 5^{4n+1} : 23$ ;
- c)  $3^{2n} \cdot 2^{3n} + 2^{3n+1} \cdot 3^{2n+1} + 8^{n+1} \cdot 9^n : 15$ ;
- d)  $2 \cdot 4^{2n+1} + 45 \cdot 3^{n+1} : 13$ ;
- e)  $2^{4n+5} \cdot 5^n + 2^{n+1} \cdot 3^{2n+1} \cdot 5 : 31$ .

□21. Să se demonstreze că pentru orice numere naturale  $m, n \in \mathbb{N}^*$  este adevărată afirmația: „ $(2n+1)^{2^m} - 1$  se divide cu  $2^{m+2^m}$ ”.

□22. Fie numerele  $a, x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$ . Să se demonstreze că:

- a) dacă  $(a, x_i) = 1, 1 \leq i \leq n$ , atunci  $(a, x_1 x_2 \dots x_n) = 1$ ;
- b) dacă pentru orice  $i \neq j, (x_i, x_j) = 1$  și  $x_i$  divide  $a, 1 \leq i \leq n$ , atunci  $x_1 x_2 \dots x_n$  divide  $a$ .

□23. Să se demonstreze că pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$  are loc egalitatea:

$$\left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{2}{2}\right] + \left[\frac{3}{2}\right] + \dots + \left[\frac{n}{2}\right] = \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

□24. Să se calculeze  $[a_n]$ , unde  $a_n = \sqrt{2005 + \sqrt{2005 + \dots + \sqrt{2005}}}$ , numărul radicalilor fiind egal cu  $n$ .

□25. Se consideră numărul real  $x$  cu proprietatea că  $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$ . Să se arate că  $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$ , pentru oricare  $n \in \mathbb{Z}$ .

□26. Se consideră numerele reale  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , astfel încât  $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n + 1, n \geq 1$ . Să se demonstreze că  $a_n = 2^n - 1, \forall n \in \mathbb{N}$ .

□27. Se consideră numerele reale  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , astfel încât  $a_1 = 2, a_2 = 5, a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Să se arate că  $a_n = 2^n + 3^n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

□28. Se consideră numerele  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , astfel încât  $a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}, n \geq 1$ . Să se demonstreze că pentru oricare  $n \in \mathbb{N}^*, a_n \leq 2$ .

□29. Să se determine exponentul factorului 2 în descompunerea în factori primi a numărului  $f(n) = (n+1)(n+2)\dots(n+n), n \geq 1$ .

□30. Fie  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{N}^*$ . Să se arate că pentru oricare  $n \in \mathbb{N}^*$  numărul  $f(n) = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) + \dots + (a_n^2 + b_n^2)$  se poate scrie ca sumă a două pătrate perfecte.

□31. Să se arate că dacă  $[n^2x]$  este pătrat perfect pentru oricare  $n \in \mathbb{N}$ , numărul  $x$  este pătrat perfect.

□32. Să se arate că pentru oricare  $k \in \mathbb{Z}$  există  $n \in \mathbb{Z}$  și o alegere convenabilă a semnelor „+” și „-” astfel încât  $k = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \dots \pm n^2$  (*teorema Erdos-Suranyi*).

□33. Fie ABCD un pătrat. Să se demonstreze că pentru oricare  $n \in \mathbb{N}, n \geq 6$ , pătratul ABCD poate fi partiționat în  $n$  pătrate.

□34. Fie ABCD un pătrat. Să se demonstreze că pentru oricare  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ , pătratul ABCD poate fi partiționat în două poligoane congruente cu  $n$  laturi,  $n \geq 3$ .

□35. Fie ABCD un pătrat. Să se demonstreze că pătratul ABCD poate fi partiționat în 4 poligoane congruente cu  $n$  laturi,  $n \geq 3$ .

□36. Să se determine mulțimea  $A = \{a_1, a_2, \dots\} \subset \mathbb{N}^*$  cu proprietatea că  $a_1 = 1$  și  $\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \dots + \sqrt{a_n} = \frac{(n+1)\sqrt{a_n}}{2}$ , pentru oricare  $n \in \mathbb{N}^*$ .

□37. Să se arate că orice sumă de bani mai mare sau egală cu 5 poate fi plătită numai cu monede de 2 și 3.

□38. Să se arate că oricare triunghi echilateral ABC poate fi partitionat în  $2^{2n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  triunghiuri echilaterale congruente.

□39. Să se arate că oricare triunghi echilateral ABC poate fi partitionat în  $3n+1$  triunghiuri echilaterale,  $n \in \mathbb{N}$ .

□40. Să se demonstreze că oricare triunghi echilateral poate fi partitionat în  $n^2$  triunghiuri echilaterale,  $n \geq 1$ .

□41. Să se demonstreze că orice triunghi echilateral se poate partitiona în 3 poligoane congruente cu  $n$  laturi,  $n \geq 3$ .

### TESTE DE VERIFICARE

#### Testul nr. 1

○ 1. Să se demonstreze că pentru oricare  $n \in \mathbb{N}^*$ , numărul  $3^{2n-1} + 2^{n+1}$  se divide cu 7.

○ 2. Să se arate că  $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2 - \frac{2}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

○ 3. Să se demonstreze că dacă elementele mulțimii  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k, \dots\}$  verifică relațiile  $a_1 = 1$  și  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_n \cdot a_{n+1}}{2}$  pentru oricare  $n \in \mathbb{N}$ , atunci  $A = \mathbb{N}^*$ .

#### Testul nr. 2

○ 1. Să se demonstreze că dacă  $a_i = (-1)^i (2i+1)$  are loc egalitatea:  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2n} = 2n$ , pentru  $n \in \mathbb{N}^*$ .

○ 2. Să se demonstreze că pentru oricare  $n \in \mathbb{N}^*$  are loc egalitatea:  $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ .

○ 3. Să se demonstreze că:  $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{1}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{1}{1^2 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot n^2} \leq \frac{3n-1}{2n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

### 4.2. PROBLEME DE NUMĂRARE

□42. Fie A și B două mulțimi finite astfel încât  $\text{card}(A \cup B) = 52$ ,  $\text{card}(A \cap B) = 6$  și  $\text{card}(A \setminus B) = 47$ . Câte elemente are mulțimea B? Dar  $\mathcal{P}(B)$ ?

□43. Să se determine  $\text{card}(A)$  știind că sunt îndeplinite condițiile  $\text{card}(A \cup B) = 235$ ,  $\text{card}(B \setminus A) = 81$  și  $\text{card}(B) = 154$ .

□44. Mulțimile A și B sunt astfel încât  $\text{card}(A \cup B) = 160$ ,  $\text{card}(A - B) = 48$  și  $\text{card}(B - A) = 44$ . Să se calculeze  $\text{card}(A \cap B)$ .

□45. Câte elemente are o mulțime dacă ea are 512 submulțimi? Dar dacă are 32768 submulțimi?

□46. Câte elemente are mulțimea A dacă se știe că  $A \subset B$ ,  $\text{card}(\mathcal{P}(B)) \leq 50$  și  $\text{card}(\mathcal{P}(A)) \geq 27$ ?

□47. Un grup de 140 de elevi au fost plecați în vacanță la munte și la mare. Câți elevi au fost și la munte și la mare dacă 48 de elevi au fost numai la mare și cu 20 mai mulți au fost numai la munte?

□48. Dintr-o clasă de 30 de elevi, 12 elevi practică atletismul, 16 practică înotul, iar 7 elevi practică ambele sporturi. Câți elevi din clasă nu practică niciun sport?

□49. Pentru marcarea unei zone de agrement sunt necesare 480 de stegulețe colorate cu alb, roșu și galben. 280 de stegulețe trebuie să aibă pe ele culoarea galben, 200 de stegulețe trebuie să aibă pe ele culoarea alb, 288 de stegulețe trebuie să aibă pe ele culoarea roșu, 128 de stegulețe trebuie să aibă pe ele culorile alb și roșu, 144 trebuie să aibă pe ele galben și roșu, iar 152 trebuie să aibă pe ele culorile alb și galben. Există stegulețe care vor avea pe ele cele trei culori?

□50. La un examen s-au prezentat 50 de candidați. 30 dintre aceștia au susținut o probă sportivă, 34 au susținut o probă de muzică, iar 4 candidați au fost respinși la vizita medicală. Câți candidați au susținut ambele probe?

□51. În urma unui sondaj efectuat pe un grup de tineri privind petrecerea timpului liber prin sport, muzică și lectură s-au înregistrat următoarele date: 180 de tineri practică sportul, 260 ascultă muzică, 120 fac lectură, 100 de tineri se relaxează prin sport și muzică, 85 prin sport și lectură, 95 prin muzică și lectură, iar 50 de candidați practică cele trei activități. Câți tineri au fost în grup?

- 52. Se consideră mulțimea  $A = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ .
- Câte elemente ale mulțimii  $A$  se divid cu 3?
  - Câte elemente ale mulțimii  $A$  se divid cu 7?
  - Câți multipli ai numărului 31 se află în  $A$ ?
- 53. Se consideră mulțimea  $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 10000\}$ .
- Câte elemente ale mulțimii  $A$  sunt divizibile cu 2 sau cu 3?
  - Câte elemente ale mulțimii  $A$  sunt multipli de 3 și 5?
  - Câte elemente ale mulțimii  $A$  nu se divid nici cu 5, nici cu 7?
- 54. Se consideră mulțimea  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 1250\}$ .
- Câte elemente ale mulțimii  $A$  sunt divizibile sau cu 2 sau cu 4?
  - Câte elemente ale mulțimii  $A$  sunt divizibile și cu 2 și cu 4?
  - Câte elemente ale mulțimii  $A$  sunt divizibile și cu 2 și cu 3?
- 55. Câte numere naturale mai mici sau egale cu 1500 sunt:
- divizibile simultan cu 2, cu 3 și cu 6;
  - divizibile simultan cu 2, cu 3 și cu 5;
  - divizibile simultan cu 6, 8 și 14?
- 56. Câte numere naturale nenule mai mici sau egale cu 9999 sunt:
- divizibile cu 4 sau cu 6;
  - divizibile cu 12 sau cu 15;
  - divizibile cu 4, 14 sau cu 28?
- 57. Câte numere naturale nenule mai mici ca 1000:
- sunt divizibile cu 2, 3 sau cu 7;
  - sunt divizibile cu 3, 5 sau cu 8;
  - nu sunt multipli de 4, 7 și 9?
- 58. Câte numere naturale mai mici decât 8100 sunt prime cu 8100?
- 59. La un turneu de șah participă 25 de sportivi.
- Dacă fiecare doi șahiști s-au întâlnit o dată, câte partide s-au jucat în acest turneu?
  - Dacă șahiștii schimbă între ei adresele lor, câte schimburi s-au efectuat?
- 60. Fie mulțimea  $A = \{0, 1, 2, 3, \dots, 2005\}$ .
- Câte elemente are mulțimea  $B = \{x \in A \mid x = 10 + k^2, k \in \mathbb{N}\}$ .
- 61. Se aruncă 3 zaruri cu fețele numerotate 1, 2, 3, 4, 5, 6. Câte situații există ca să apară simultan fețele numerotate cu numere pare?
- 62. Câte numere naturale  $\overline{abcdm}$  există știind că  $a \geq 7, b \leq 2, 4 < c < 8$ , iar  $\overline{dm} : 17$ ?
- 63. Câte numere de telefon de forma  $\overline{6x7abc}$  există dacă  $x, c \in \{0, 2, 4\}$ , iar  $a, b \in \{5, 9\}$ ?

- 64. Fie mulțimile  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n = \overline{abc} \text{ și } c \text{ număr impar}\}$  și  $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n = \overline{abcd}, a \text{ este par, } c \text{ este divizibil cu } 3\}$ .
- Să se determine  $\text{card}(A)$  și  $\text{card}(B)$ .
- 65. Câte numere naturale de 5 cifre există?
- 66. Câte numere naturale de 5 cifre care încep cu cifra 8 există?
- 67. Câte numere naturale de 6 cifre care încep cu 4 și se termină cu 0 există?
- 68. Într-o urnă sunt 3 bile albe, 4 bile negre și 5 bile roșii. Se extrag pe rând 3 bile fără a întoarce bila extrasă în urnă. Câte posibilități de a obține o bilă albă, o bilă neagră și o bilă roșie, în această ordine, există?
- 69. Într-o urnă sunt 4 bile albe, 3 bile negre și 5 bile roșii. Câte triplete se pot obține prin extragerea a 3 bile fără a întoarce bila extrasă în urnă?
- 70. În câte moduri se pot repartiza 4 calculatoare la două școli?
- 71. În câte moduri se pot repartiza 6 calculatoare la 3 școli dacă fiecare școală primește cel puțin un calculator?
- 72. Cu 5 culori trebuie să acoperim 3 panouri. În câte moduri poate fi făcută această operație?
- 73. Câte numere naturale de două cifre se pot forma cu cifrele 1, 2, 3, 4? Câte dintre acestea au ambele cifre distincte?
- 74. Se scriu numerele naturale în ordine crescătoare care încep cu 1. Să se determine cifra de pe poziția 25180.
- 75. Pentru numerotarea paginilor unei cărți s-au folosit 2780 de cifre. Câte pagini are lucrarea?
- 76. Care este exponentul lui 2 în descompunerea în factori primi a numărului  $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 1000$ ? Dar exponentul lui 3?
- 77. În câte zerouri se termină numărul  $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 1000$ ?
- 78. a) În câte moduri distincte se poate descompune în produs de doi factori primi între ei numărul 18900?  
b) În câte moduri distincte se poate descompune în produs de doi factori primi între ei numărul natural  $n$ ?

□79. Să se determine numărul de diagonale ale unui poligon convex cu  $n$  laturi.

□80. Câte diagonale are o prismă cu baza un poligon convex cu  $n$  laturi?

□81. În câte regiuni împart  $n$  drepte concurente un plan?

□82. Câte drepte determină  $n$  puncte din plan, oricare trei puncte fiind necoliniare?

□83. Se consideră pătratul ABCD. Mediatoarele laturilor împart pătratul în alte pătrate. Mediatoarele laturilor acestora împart pătratele obținute în alte pătrate. În câte pătrate este împărțit pătratul inițial după  $n$  pași?

□84. Se consideră mulțimea  $A = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{n}\} \cap \mathbb{Q}$ .

- a) Să se determine  $n \in \mathbb{N}^*$  pentru care mulțimea  $A$  are 50 de elemente.  
b) Să se determine  $\text{card}(A)$ .

### TESTE DE VERIFICARE

#### Testul nr. 1

○ 1. Se consideră mulțimea  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $m$  numărul submulțimilor cu 3 elemente, iar  $p$  numărul submulțimilor cu 5 elemente. Să se compare numerele  $m$  și  $p$ .

○ 2. Se consideră numărul natural 68600.

- a) Să se determine numărul divizorilor acestuia.  
b) Să se determine numărul divizorilor, divizibili cu 7.

○ 3. Câte numere naturale de 5 cifre la împărțirea cu 10 dau restul 7?

#### Testul nr. 2

○ 1. Câte numere naturale mai mici decât 300 au exact 4 divizori?

○ 2. Fie mulțimile  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  și  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ . Câte mulțimi  $X$  verifică egalitatea  $A \cup X = B$ ?

○ 3. Fie mulțimile  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 3k, k \in \mathbb{N}\}$  și  $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 5k, k \in \mathbb{N}\}$ . Câte perechi  $(x, y) \in A \times B$  există astfel încât  $x + y = 73$ ?

## II. FUNCȚII

### 1 ȘIRURI DE NUMERE REALE

#### 1.1. NOȚIUNEA DE ȘIR DE NUMERE REALE

□1. Să se calculeze primii 5 termeni ai fiecăruia dintre șirurile de numere reale definite prin formula termenului general astfel:

a)  $a_n = -n(n+2), n \geq 1;$

b)  $b_n = \frac{n}{(-2)^{n(n-1)}}, n \geq 1;$

c)  $x_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}, n \geq 1;$

d)  $y_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}, n \geq 1;$

e)  $e_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}, n \geq 1;$

f)  $d_n = \text{tg} \frac{n\pi}{3}, n \geq 1;$

g)  $z_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1}, n \geq 1;$

h)  $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}, n \geq 1.$

□2. Să se determine  $x_2, x_3, x_4$  și să se exprime  $x_{n+3}$  în funcție de  $x_n$ , știind că:

a)  $x_1 = 0, x_{n+1} = 5x_n + 3, n \geq 1;$

b)  $x_1 = \sqrt{5}, x_{n+1} = \sqrt{5 + x_n}, n \geq 1;$

c)  $x_1 = 2, x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + 1, n \geq 2;$

d)  $x_1 = 0, x_n - x_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, n \geq 2;$

e)  $x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + 2x_n}, n \geq 1;$

f)  $x_1 = \frac{3}{2}, x_n = \frac{n}{n+2} \cdot x_{n-1}, n \geq 2.$

Algebră • II. FUNCȚII

□3. Să se determine formula termenului general pentru următoarele șiruri definite descriptiv:

- a)  $\frac{2^2}{1 \cdot 3}, \frac{3^2}{2 \cdot 4}, \frac{4^2}{3 \cdot 5}, \dots;$       b)  $\frac{5}{9}, \frac{9}{17}, \frac{13}{25}, \frac{17}{33}, \dots;$   
 c)  $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, -\frac{5}{32}, \frac{3}{32}, \dots;$       d)  $\frac{3}{4}, \frac{6}{7}, \frac{9}{10}, \frac{12}{13}, \dots;$   
 e) 2, 22, 222, 2222, ...

□4. Fie șirul  $(a_n)$  definit descriptiv astfel: 2,(3); 3,(6); 5; 6,(3); 7,(6); 9; ...

- a) Să se determine formula termenului general  $a_n$ .  
 b) Să se precizeze care dintre numerele 29, 81, 101,  $\frac{509}{3}$ , 1201, 1334,(3)

sunt termeni ai șirului.

□5. Fie șirul  $(a_n)$  cu termenul general  $a_n = \frac{n^2 + n - 2}{n(n+1)}, n \geq 1$ .

- a) Să se calculeze termenii de rang 1, 2, 3, 10, 25,  $n+2$ ,  $n+5$ .  
 b) Să se precizeze rangul termenilor egali cu  $\frac{108}{110}$ ; 0,9(7); 0,99(97).  
 c) Să se determine formula termenului general al șirului  $(b_n)$ , definit

prin  $b_n = a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n, n \geq 2$ .

□6. Fie șirul  $(x_n)$ ,  $x_n = \frac{n+1}{n+2}, n \geq 1$ .

- a) Să se determine formula termenului general al șirului  $(y_n)$  știind că  $y_n = x_{n+1} - x_n, n \geq 1$ .  
 b) Să se calculeze suma primilor 100 de termeni ai șirului  $(y_n)$ .

□7. Se consideră șirul  $(x_n)$  definit prin relația de recurență:

$$x_{n+1} = x_n + 4n + 1, x_1 = 1.$$

- a) Să se determine formula termenului general al șirului  $(x_n)$ .  
 b) Este termen al șirului numărul 4950? Dar 5005?

□8. Fie șirul de numere reale  $(a_n)$  unde  $a_1 = 5, a_2 = 17$  și  $a_{k+2} = 5a_{k+1} - 4a_k$ . Să se demonstreze că  $a_n = 4^n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

□9. Fie șirul  $(a_n)$  cu  $a_1 = 1, a_2 = 5, a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n, n \geq 1$ .

- a) Să se determine  $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$  pentru care  $a_n = \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot (-1)^n, n \in \mathbb{N}^*$ .  
 b) Să se demonstreze că  $a_n = 2^n + (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

□10. Fie șirul  $(a_n)$  definit recurent astfel:

$$a_1 = 1, a_2 = 4, a_{k+1} = 2a_k - a_{k-2} - 2k + 5, k \geq 2.$$

- a) Să se determine  $a_3, a_5, a_6$ .  
 b) Să se determine formula termenului general al șirului.

□11. Fie șirul  $(x_n)$  definit prin recurență astfel:

$$x_1 = \sqrt{2}, x_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}} + x_k, k \geq 1.$$

- a) Să se determine formula termenului general al șirului.  
 b) Să se verifice dacă  $\sqrt{75}; 75; p+1$ , unde  $p \in \mathbb{N}^*$ , sunt termeni ai șirului  $(x_n)$ .

□12. Să se determine formula termenului general al șirului definit prin:

- a)  $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + n, n \geq 1$ ;  
 b)  $a_1 = \frac{1}{2}, a_{k+1} = 2a_k, k \geq 1$ ;  
 c)  $x_1 = 0, x_{n+1} = x_n + n(n+1), n \geq 1$ ;  
 d)  $a_1 = 1, (k+2)a_{k+1} = (k+1)a_k, k \geq 1$ ;  
 e)  $z_1 = 1, z_2 = 4, z_{k+1} + z_{k-1} = 2(z_k + 1), k \geq 2$ .

□13. Se consideră șirul  $(z_n)$  și  $S_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n$  suma primilor  $n$  termeni ai șirului. Să se determine formula termenului general  $z_n$ , dacă  $S_n = (2n-1) \cdot (3n+2) + 2$ .

□14. Fie șirul  $(x_n)$  definit astfel:  $x_1 = 2, x_{n+1} = \frac{x_n - 1}{x_n + 1}, n \geq 1$ . Să se demonstreze că  $x_n = x_{n+4}$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$ .

□15. Fie șirul  $(f_n)$ ,  $f_1 = f_2 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, n \geq 1$ , numit șirul lui Fibonacci. Să se demonstreze că:

- a)  $f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$ , pentru oricare  $n \geq 1$ ;  
 b)  $f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}$ , pentru oricare  $n \geq 1$ ;  
 c)  $f_{n+2} = 3f_{n+3} + 5f_{n+2}$ , pentru oricare  $n \geq 8$ ;  
 d)  $f_n \cdot f_{n-2} = f_{n+1}^2 + (-1)^n$ , pentru orice  $n \geq 3$ ;  
 e)  $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$ , pentru orice  $n \geq 1$ ;  
 f)  $f_1 + f_3 + \dots + f_{2n-1} = f_{2n}$ , pentru orice  $n \geq 1$ ;  
 g)  $f_2 + f_4 + \dots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$ , pentru orice  $n \geq 1$ .

□16. Se consideră șirul de numere reale  $(x_n)$  cu proprietatea că  $x_n > 0$  și

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{(x_1 + x_n) \cdot x_n}{2}, \text{ pentru orice } n \geq 1.$$

a) Să se determine  $x_1, x_2, x_3, x_n$ , unde  $n \in \mathbb{N}^+$ .

b) Să se rezolve ecuația  $x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1} = 5n^2 - 7n - 14$ .

□17. Se consideră șirul  $(x_n)$  de numere reale pozitive care verifică egalitatea

$$(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1) \dots (x_n^2 - 1) = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2}{2}, n \geq 1. \text{ Să se determine termenul general al șirului.}$$

### 1.2. ȘIRURI MĂRGINITE

□18. Să se studieze mărginirea șirurilor cu termenul general:

a)  $a_n = \frac{1}{n+2}$ ; b)  $a_n = \frac{n+2}{n+3}$ ; c)  $a_n = \frac{(-1)^n}{n+4}$ ; d)  $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}$ ;

e)  $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$ ; f)  $a_n = \frac{n^2+2}{2n^2+1}$ ; g)  $a_n = \frac{2n^2-1}{n^2+3}$ ;

h)  $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ; i)  $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+2}$ ; j)  $a_n = \sqrt{\frac{4n^2+1}{n^2+1}}$ .

□19. Să se studieze mărginirea șirului cu termenul general:

a)  $a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$ ;

b)  $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ ;

c)  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$ ;

d)  $a_n = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2^2} + \dots + \frac{1}{1+2^n}$ ;

e)  $a_n = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^2}$ .

□20. Să se studieze mărginirea șirului cu termenul general:

a)  $a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$ ;

b)  $a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]$ ;

c)  $a_n = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1)}{1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \dots + (2n-1)(2n+1)}$ .

□21. Să se arate că următoarele șiruri sunt mărginite:

a)  $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}, n \geq 1$ ;

b)  $b_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}, n \geq 1$ .

□22. Să se studieze mărginirea șirurilor cu termenul general:

a)  $a_n = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ ;

b)  $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ ;

c)  $a_n = \frac{1+3^n}{1+2^n}$ ;

d)  $a_n = \frac{1+a^n}{1+2^n}, a \in (0, +\infty)$ ;

e)  $a_n = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \cdot \sin \frac{n\pi}{6}$ ;

f)  $a_n = n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$ ;

g)  $a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}$ ;

h)  $a_n = n^k (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), k \geq 0$ .

□23. Să se studieze mărginirea șirurilor date de relațiile de recurență:

a)  $a_1 = 1, a_{n+1} = 5 + a_n, n \geq 1$ ; b)  $a_1 = \frac{2}{3}, 3a_{n+1} = 2a_n, n \geq 1$ ;

c)  $a_1 = 1, 2a_{n+1} = 2 + a_n, n \geq 1$ ; d)  $a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}, n \geq 1$ .

□24. Șirul  $(a_n)$  este nemărginit. Rezultă că șirul  $\left(\frac{1}{a_n}\right)$  este mărginit?

□25. Șirul  $(a_n)$  de numere reale nenule este mărginit. Rezultă că șirul  $\left(\frac{1}{a_n}\right)$  este mărginit?

□26. Șirurile  $(a_n)$  și  $(b_n)$  sunt nemărginite. Ce se poate spune despre mărginirea șirurilor:

a)  $(a_n + b_n)$ ; b)  $(a_n \cdot b_n)$ ; c)  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ ?

Algebră • II. FUNCȚII

□27. Se consideră șirurile  $(a_n)$  și  $(b_n)$  astfel încât șirurile  $(x_n)$ ,  $(y_n)$ ,  $x_n = a_n + b_n$ ,  $y_n = a_n \cdot b_n$  sunt șiruri mărginite. Rezultă că șirurile  $(a_n)$  și  $(b_n)$  sunt mărginite?

□28. Fie  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  șiruri de numere reale. Să se determine valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) „Dacă șirul  $(x_n)$ ,  $x_n = a_n + b_n$  este mărginit, atunci șirurile  $(a_n)$  și  $(b_n)$  sunt șiruri mărginite.”;

b) „Dacă șirul  $(x_n)$ ,  $x_n = a_n + b_n$  este mărginit, atunci cel puțin unul dintre șirurile  $(a_n)$  sau  $(b_n)$  este mărginit.”;

c) „Dacă șirul  $(a_n b_n)$  este mărginit, atunci cel puțin unul dintre șirurile  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  este mărginit.”.

□29. Se consideră șirurile  $(a_n)$ ,  $(b_n)$ ,  $(c_n)$  astfel încât  $a_n \leq c_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$ . Dacă  $(a_n)$  și  $(b_n)$  sunt șiruri mărginite, să se arate că șirul  $(c_n)$  este șir mărginit.

□30. Să se studieze mărginirea șirurilor  $(a_n)$  și  $(b_n)$  în cazurile:

a)  $a_n \leq (-1)^n \cdot n \leq b_n, n \geq 1$ ; b)  $a_{2n} \leq (-1)^n \cdot n \leq a_{2n-1}, n \geq 1$ .

1.3. ȘIRURI MONOTONE

□31. Să se studieze monotonia șirurilor cu termenul general:

a)  $a_n = \frac{n+1}{2n}$ ; b)  $a_n = n^2 - n$ ; c)  $a_n = \frac{2n-1}{3n-2}$ ;

d)  $a_n = n + (-1)^n$ ; e)  $a_n = \frac{n+1}{n - (-1)^n}$ ; f)  $a_n = \frac{2n-3}{n^2+n}$ .

□32. Să se studieze monotonia șirurilor definite astfel:

a)  $a_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{n+1}$ ; b)  $a_n = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1)}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}$ ;

c)  $a_n = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + \dots + (4n^2 - n)}{n^3}$ ; d)  $a_n = \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{1+2+3+\dots+n}$ ;

e)  $a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)(2^n - 1)$ .

□33. Să se studieze monotonia șirurilor definite astfel:

a)  $a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$ ; b)  $a_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\dots\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$ ;

c)  $a_n = \left(1 - \frac{1}{2^1}\right)\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ ; d)  $a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\dots\left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]$ .

□34. Să se studieze monotonia șirurilor  $(a_n)$  și  $(b_n)$  dacă:

a)  $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n}$ ; b)  $b_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \dots + \frac{1}{4n+1}$ .

□35. Să se studieze monotonia șirurilor cu termenul general:

a)  $a_n = \alpha \cdot n + 1, \alpha \in \mathbb{R}$ ; b)  $a_n = n + \alpha \cdot (-1)^n, \alpha \in \mathbb{R}$ ;

c)  $a_n = \frac{\alpha \cdot n + \beta}{n+1}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ; d)  $a_n = \frac{2n+1}{n+\alpha^2}, \alpha \in \mathbb{R}$ ;

e)  $a_n = \alpha^n, \alpha \in (0, +\infty)$ ; f)  $a_n = (\sqrt{1+x} - \sqrt{x})^n, x \in [0, +\infty)$ .

□36. Să se studieze monotonia șirurilor date prin relațiile de recurență:

a)  $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2, n \geq 1$ ; b)  $a_1 = \frac{1}{5}, a_{n+1} = 5a_n, n \geq 1$ ;

c)  $a_1 = \frac{2}{3}, 3a_{n+1} = 2a_n, n \geq 1$ ; d)  $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n - 1, n \geq 1$ ;

e)  $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}, n \geq 1$ ; f)  $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 4a_n + 5}, n \geq 1$ ;

g)  $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot a_n, n \geq 1$ .

□37. Șirul  $(a_n)$  este șir monoton crescător. Rezultă că șirul  $(a_n^2)$  este monoton crescător? Dar șirul  $(a_n^3)$ ?

□38. Șirul  $(a_n)$  este monoton crescător, iar șirul  $(b_n)$  este monoton descrescător. Care este monotonia șirului  $(c_n)$  cu termenul general:

a)  $c_n = a_n - b_n$ ; b)  $c_n = \frac{a_n}{b_n}, b_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$ ; c)  $c_n = a_n b_n$ ?

□39. Șirul  $(a_n)$  de numere reale nenule este monoton crescător. Să se determine monotonia șirurilor:

a)  $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ ; b)  $(1 - a_n)$ ; c)  $(-a_n)$ ; d)  $\left(1 - \frac{1}{a_n}\right)$ ; e)  $(2^{a_n})$ .

□40. Fie șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$  un șir de numere reale. Să se demonstreze că șirul  $(x_n)$  este strict monoton dacă și numai dacă  $(x_{n+1} - x_n)(x_n - x_{n-1}) > 0, \forall n \geq 1$ .

TESTE DE VERIFICARE

Testul nr. 1

- 1. Se consideră șirul  $(a_n)$  definit prin relația de recurență:  
 $a_1 = 2, a_{n+1} = (\sqrt{2} - 1)a_n, n \geq 1.$   
 a) Să se determine  $a_2, a_3, a_4, a_n.$   
 b) Să se determine monotonia și mărginirea șirului  $(a_n).$
- 2. Se consideră șirul  $(a_n), a_n = \frac{2n+3}{4n-1}.$   
 a) Să se scrie termenii  $a_2, a_4, a_7$  și  $a_{n+5}.$   
 b) Sunt termeni al șirului numerele:  $\frac{33}{59}, \frac{115}{223}, \frac{6n+7}{12n+7}?$   
 c) Să se studieze monotonia și mărginirea șirului  $(a_n).$
- 3. Să se găsească formula termenului general al șirului 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, ...

Testul nr. 2

- 1. Se consideră șirul  $(a_n), a_n = 1 + (-1)^n \cdot \frac{4}{3^{2n-1}}.$   
 a) Să se determine  $a_1, a_3, a_{10}, a_{2n}, a_{3n-1}.$   
 b) Să se studieze monotonia și mărginirea șirului.  
 c) Să se arate că șirul  $(b_n), b_n = \frac{a_n - 1}{a_{n+1} - 1}$  este șir constant.
- 2. Se consideră șirul  $(b_n)$  definit prin relația de recurență:  
 $b_1 = 3, b_{n+1} = \sqrt{2b_n + 8}.$   
 a) Să se determine  $b_2, b_3, b_4, b_5.$   
 b) Să se demonstreze că șirul  $(b_n)$  este monoton și mărginit.
- 3. Să se determine formula termenului general al șirului:  $2, \frac{1}{4}, 16, \frac{1}{256}, \dots$

2 TIPURI DE ȘIRURI

2.1. PROGRESII ARITMETICE

- 1. Să se scrie termenii  $a_2, a_3, a_4, a_{10}, a_{20}$  ai progresiei aritmetice  $(a_n)$  dacă:  
 a)  $a_1 = -3, r = 2;$       b)  $a_1 = 2,5, r = -0,5;$   
 c)  $a_{15} = 49, r = 3;$       d)  $a_{30} = 97, a_{31} = 102.$
- 2. Să se determine termenii de rang 20,  $n+1, n+3$  al progresiei aritmetice:  
 a) 2, 6, 10, 14, ...;      b) -2, -5, -8, -11, ...;  
 c)  $-\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, -2, \dots;$       d)  $\sqrt{2}, \sqrt{2}-1, \sqrt{2}-2, \dots$
- 3. Fie progresia aritmetică  $(a_n)$  cu rația  $r$  definită prin anumite elemente date. Să se determine elementele cerute în fiecare caz:  
 a)  $a_1 = 8, r = 1, (3).$  Să se calculeze  $a_{61}, a_{70}, a_{78}.$   
 b)  $a_1 = 5, a_{45} = 16.$  Este termen al progresiei numărul 69?  
 c)  $a_{49} = 100, r = 1,5.$  Să se calculeze  $a_5, a_{11}, a_{35}.$   
 d)  $a_3 = 13, a_{34} = 137.$  Să se calculeze  $r, a_1, a_{10}.$   
 e)  $a_{14} + a_{16} + a_{18} + a_{20} = 100.$  Să se calculeze  $S_{33}.$   
 f)  $a_8 + a_4 = a_{28} + a_{49} = 256.$  Să se calculeze  $S_{32}.$
- 4. Să se determine termenii  $a_1, a_2, a_3$  ai progresiei aritmetice:  
 a)  $a_1, a_2, a_3, 11, 15, 19, \dots;$   
 b)  $a_1, a_2, a_3, -4, -\frac{14}{3}, -\frac{16}{3}, \dots;$   
 c)  $a_1, a_2, a_3, -1, \frac{1}{2}, 2, \dots$
- 5. Să se determine termenii  $a_2, a_3, a_5, a_{15}, a_{30}$  din progresia aritmetică:  
 a)  $-8, a_2, a_3, -17, a_5, \dots;$       b)  $\frac{5}{6}, a_2, a_3, -\frac{67}{6}, a_5, \dots$
- 6. Să se determine suma primilor  $n$  termeni ai progresiei aritmetice  $(a_n)$  dacă se cunosc:  
 a)  $a_1 = -5, r = 4, n = 25;$       b)  $a_1 = 200, r = -2, n = 80;$   
 c)  $a_2 = -2, a_7 = 28, n = 50;$       d)  $a_3 = 16, a_{14} = 170, n = 20.$

□7. Să se determine progresia aritmetică  $(a_n)$  dacă:

a)  $a_5 = 12, a_{19} = 19$ ; b)  $a_1 = 33, S_{26} = 1053$ ; c)  $\begin{cases} 2a_5 - 3a_2 + a_{10} = 42 \\ a_3 \cdot a_5 = 112 \end{cases}$ ;  
 d)  $\begin{cases} 3a_3 - 4a_5 + 2a_{10} = 30 \\ a_7 \cdot a_{11} = 836 \end{cases}$ ; e)  $\begin{cases} S_4 - a_2 - S_2 = 6 \\ S_3 + a_6 = 8 \end{cases}$ ; f)  $\begin{cases} a_1^2 + a_4^2 = 50 \\ S_5 - S_3 = 16 \end{cases}$

□8. Cunoscând suma  $S_n$  a primilor  $n$  termeni ai unei progresii aritmetice  $(a_n)$ , să se determine termenii  $a_1, a_n$  și rația progresiei, dacă:

a)  $S_n = 8n^2 - 6n$ ; b)  $S_n = 5n^2 - 3n$ ; c)  $S_n = \frac{n^2 + 6n}{6}$ ; d)  $S_n = \frac{n}{8} - \frac{n^2}{8}$ .

□9. Să se determine progresia aritmetică care îndeplinește condițiile:  
 a) suma primilor trei termeni ai progresiei este egală cu 10,5, iar produsul acestor termeni este egal cu 35;  
 b) suma primilor cinci termeni este egală cu 5, iar produsul acestora este egal cu 45.

□10. Șirul  $(a_n)$  are termenul general dat de formula:

a)  $a_n = 3n - 4$ ; b)  $a_n = \frac{6 + 11n}{4}$ ; c)  $a_n = \frac{7 - 3n}{6}$ ;  
 d)  $a_n = n^2 + 2$ ; e)  $a_n = 2^n$ ; f)  $a_n = \frac{3n - 7}{5}$ .

Să se precizeze dacă șirul  $(a_n)$  este progresie aritmetică și în caz afirmativ să se precizeze rația sa.

□11. Să se decidă dacă este progresie aritmetică un șir astfel încât, pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ , suma primilor  $n$  termeni ai săi este dată de formula:

a)  $S_n = n^2$ ; b)  $S_n = n^2 + 2n$ ; c)  $S_n = n^2 + 4$ ; d)  $S_n = n^2 + \alpha n, \alpha \in \mathbb{I}$ ;  
 e)  $S_n = \alpha n^2 + \beta n, \alpha \in \mathbb{I} \setminus \{0\}, \beta \in \mathbb{I}$ ;  
 f)  $S_n = \alpha n^2 + \beta n + \gamma, \alpha \in \mathbb{I} \setminus \{0\}, \gamma, \beta \in \mathbb{I}$ .

□12. Se consideră șirul  $(a_n)$  și  $S_n$  suma primilor  $n$  termeni ai acestuia. Dacă există numerele reale  $a, b, c, d$  astfel încât  $S_n = an^3 + bn^2 + cn + d$ , atunci  $(a_n)$  este progresie aritmetică dacă și numai dacă  $a = d = 0$ .

□13. Progresia aritmetică  $(a_n)$  cu rația  $r$  este definită prin anumite elemente date. Să se determine în fiecare caz elementele cerute:

a)  $S_{n+3} = 483, a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 36; a_n + a_{n+2} + a_{n+5} = 97$ . Să se determine  $a_1, r$  și  $n$ .

b)  $a_3 + a_4 = 24, S_{3n} - 9S_n = 0$ . Să se calculeze  $a_1, r$  și  $n$ .  
 c)  $a_{23} + a_{13} + a_7 - a_{17} = 50$ . Să se calculeze  $S_{25}$ .

□14. a) Să se calculeze suma tuturor numerelor mai mici decât 1000 care se divid cu 5.

b) Să se calculeze suma tuturor numerelor naturale mai mici decât 1001 care nu se divid cu 7.

□15. Fie  $(a_n)$  o progresie aritmetică cu rația  $r, S_p$  suma primilor  $p$  termeni ai acesteia și  $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , un număr natural. Să se demonstreze că  $S_{kn} - k^2 S_n = 0 \Leftrightarrow r = 2a_1$ .

□16. Fie  $(a_n)$  o progresie aritmetică cu rația  $r$ . Atunci șirul:

a)  $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, \dots, a_n + a_{n+1}, \dots$  este progresie aritmetică. Să se precizeze rația.

b)  $a_3, a_7, a_{11}, a_{15}, \dots, a_{4n-1}, \dots$  este progresie aritmetică.

□17. Fie  $(a_n)$  o progresie și  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = an + b, a, b \in \mathbb{N}^*$ . Să se arate că șirul  $a_{f(1)}, a_{f(2)}, \dots, a_{f(n)}, \dots$  este progresie aritmetică. Ce rație are?

□18. Fie  $(b_n)$  o progresie aritmetică și  $(k_n)$  o progresie aritmetică cu termeni numere naturale în ordine crescătoare. Să se arate că șirul  $b_{k_1}, b_{k_2}, b_{k_3}, \dots, b_{k_n}, \dots$  este progresie aritmetică.

## 2.2. PROGRESII GEOMETRICE

□19. Să se determine termenul de rangul  $n$  al progresiei geometrice:

a) 5, 10, 20, 40, 80, ...; b)  $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ ; c)  $\sqrt{10}, \sqrt{5}, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \dots$ ;  
 d)  $\sqrt{2}, \sqrt{6}, 3\sqrt{2}, \dots$ ; e)  $\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 1, \dots$ ; f)  $-32, 16, -8, \dots$ .

□20. Să se determine termenii  $b_1, b_4, b_8, b_{15}$  din progresiile geometrice:

a)  $b_1, 12, 24, b_4, \dots$ ; b)  $b_1, -8, 16, b_4, \dots$ ;  
 c)  $b_1, 12, 6, b_4, \dots$ ; d)  $b_1, 1, \frac{1}{3}, b_4, \dots$ .

□21. Să se determine primii doi termeni ai progresiei geometrice  $(b_n)$  dacă:

a)  $b_8 = 27b_2$  și  $b_1 + b_2 + b_3 = 4 + \sqrt{3}$ ; b)  $b_6 = \frac{4}{9}$  și  $b_7 = -\frac{4}{27}$ ;

c)  $b_{11} = 6144$  și  $b_{15} = 32b_{10}$ ;      d)  $b_4 = -\frac{2}{9}$ ,  $q = -\frac{1}{3}$ ;  
 e)  $b_5 = 54$ ,  $b_7 = 486$ .

□22. Care dintre următoarele șiruri sunt progresii geometrice:

a)  $(x_n)$ ,  $x_n = \frac{3^{n+1}}{4^n}$ ;      b)  $(y_n)$ ,  $y_n = 2 \cdot (-\sqrt{2})^n$ ;  
 c)  $(z_n)$ ,  $z_n = \frac{1}{\sqrt{5}} + 5^n$ ;      d)  $(u_n)$ ,  $u_n = -\frac{5}{3^n}$ ?

□23. Este progresie geometrică șirul de numere reale pentru care suma primilor  $n$  termeni este egală cu:

a)  $S_n = n^2 - 2n + 1$ ;      b)  $S_n = 2^{2n+1} - 1$ ;  
 c)  $S_n = \frac{7^n - 1}{2}$ ;      d)  $S_n = 9 - 3^{n+2}$ ?

□24. Fie  $(a_n)$  o progresie geometrică. Este progresie geometrică șirul  $(b_n)$  definit prin:

a)  $b_n = a_n^2$ ; b)  $b_n = a_n + a_{n+1}$ ; c)  $b_n = a_n \cdot a_{n+1}$ ?

□25. Care dintre șirurile recurente următoare sunt progresii geometrice:

a)  $b_1 = 5$ ,  $b_n = -2b_{n-1}$ ,  $n \geq 2$ ; b)  $b_1 = \frac{1}{4}$ ,  $b_{n+2} = 3b_{n+1}$ ,  $n \geq 0$ ;  
 c)  $b_1 = 3$ ,  $b_n = 1 + b_{n-1}$ ,  $n \geq 1$ ?

□26. Fie șirul  $(v_n)$  cu termenul general  $v_n = 2(\sqrt{3})^n$ ,  $n \geq 1$ .

a) Să se stabilească dacă șirul este progresie geometrică.  
 b) Care dintre următoarele numere se găsesc printre termenii șirului  $(v_n)$ : 18, 36,  $162\sqrt{3}$ , 468, -729, 1458?

□27. Se dă progresia geometrică  $(u_n)$  cu rația  $q$ . Să se determine elementele cerute în fiecare caz.

a)  $u_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $q = 2$ ,  $n = 5$ . Se cer  $u_{3n}$  și  $S_{2n}$ .  
 b)  $u_1 = \frac{4}{5}$ ,  $u_4 = \frac{64}{48}$ . Se cer  $u_8$  și  $S_{30}$ .  
 c)  $u_3 = \frac{4}{5}$ ,  $u_6 = 100$ ,  $n = 3$ . Se cer  $S_n$  și  $u_{3n-1}$ .

□28. Să se determine progresia geometrică  $(a_n)$  dacă:

a)  $\begin{cases} a_5 - a_1 = -1218 \\ a_4 - a_2 = -420 \end{cases}$ ; b)  $\begin{cases} a_1 = -2^{-3} \\ a_4 = \\ S_{10} = 341 \end{cases}$ ;      c)  $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 21 \\ a_2 + a_3 + a_4 = 42 \end{cases}$ ;  
 d)  $\begin{cases} a_5 + a_4 = 1, (7) \\ a_6 - a_4 = -1\frac{5}{27} \end{cases}$ ; e)  $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 13 \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 91 \end{cases}$ ; f)  $\begin{cases} a_2(a_1 - a_3) = 6 \\ a_3(a_2 - a_4) = 1,5 \end{cases}$ .

□29. Fie  $(a_n)$  o progresie geometrică cu rația 2. Dacă termenilor  $a_1$ ,  $a_4$ ,  $a_6$  li se adaugă 18, 34, respectiv 16, atunci numerele obținute sunt în progresie aritmetică. Să se determine progresia  $(a_n)$ .

□30. Fie  $(a_n)$  o progresie aritmetică și  $(b_n)$  o progresie geometrică, ambele având primul termen egal cu 3,  $a_4 = b_3$  și  $a_4 + a_6 - a_2 = b_4$ . Să se determine cele două progresii.

□31. Să se determine progresiile geometrice  $(a_n)$  și  $(b_n)$  știind că:

$a_1 = b_1$ ,  $a_2 = b_1 + b_2$  și  $a_2 + a_3 = b_3 + b_4$ .

□32. Fie șirul  $(a_n)$  definit prin  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+2} - 2a_n = 1$ ,  $n \geq 1$ .

a) Să se arate că șirul  $(b_n)$ ,  $b_n = 1 + a_n$  este progresie geometrică.  
 b) Să se determine șirul  $(c_n)$  știind că pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $c_1 + c_2 + \dots + c_n = a_n$ .

□33. Se consideră șirurile  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  definite astfel:  $a_1 = 4$ ,  $a_{n+1} = \frac{2a_n + 27}{3a_n + 2}$  și

$b_n = \frac{a_n - 3}{a_n + 3}$ ,  $n \geq 1$ .

a) Să se arate că șirul  $(b_n)$  este progresie geometrică.

b) Să se determine termenii  $a_n$  și  $b_n$ .

□34. Se consideră șirurile  $(a_n)$  și  $(b_n)$  definite astfel:  $a_1 = \frac{1}{2}$ ,  $a_{n+1} = \frac{a_n + 8}{2a_n + 1}$ ,

$b_n = \frac{a_n - 2}{a_n + 2}$ ,  $n \geq 1$ .

a) Să se arate că șirul  $(b_n)$  este progresie geometrică.

b) Să se determine termenii  $a_n$  și  $b_n$ .

□35. Fie șirul  $(a_n)$  definit astfel:  $a_1 = \frac{7}{3}$ ,  $a_2 = \frac{19}{9}$ ,  $a_{n+2} = \frac{4}{3} \cdot a_{n+1} - \frac{1}{3} a_n$ .

a) Să se arate că șirul  $(b_n)$ ,  $b_n = a_{n+1} - a_n$  este progresie geometrică.

b) Să se determine termenul general al șirului  $(a_n)$ .

□36. Se consideră șirurile  $(u_n)$  și  $(v_n)$  definite astfel:  $u_1 = 2$ ,  $u_n - 2u_{n+1} = 2n + 3$ ,  $v_n = u_n + 2n - 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Să se arate că șirul  $(v_n)$  este progresie geometrică și să se precizeze primul termen și rația.

□37. Se consideră șirul  $(a_n)$  definit prin relația de recurență:  $a_1 = 0, (6)$ ,  $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{n+2}{2\sqrt{2}}$ ,  $n \geq 1$ . Să se arate că șirul  $(b_n)$  definit prin  $b_n = a_n\sqrt{2} - n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  este progresie geometrică.

□38. Să se calculeze sumele:

a)  $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{14}}$ ; b)  $\frac{1}{4} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{4^{15}}$ ;

c)  $\sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k$ ; d)  $\sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{6}\right)^{k+1}$ ; e)  $\sum_{k=1}^n \frac{5^{k+2}}{4^k}$ ; f)  $\sum_{k=1}^n \frac{3^k + 2^{2k-1}}{9^k}$ ; g)  $\sum_{k=1}^n k \cdot 2^k$ .

□39. Să se calculeze sumele:

a)  $1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \dots + n \cdot 3^n$ ;

b)  $1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ;

c)  $1 \cdot x + 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x^3 + \dots + n \cdot x^n$ ;

d)  $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 + \dots + \left(a^n + \frac{1}{a^n}\right)^2$ ,  $a \neq \pm 1$ ;

e)  $1 \cdot x^{n-1} + 2 \cdot x^{n-2} + \dots + (n-2)x^2 + (n-1)x + n$ .

□40. Fie  $(a_n)$  o progresie geometrică cu rația  $q$ . Să se studieze dacă sunt progresii geometrice șirurile definite astfel:

a)  $a_1^3, a_2^3, \dots, a_n^3, \dots$ ;

b)  $a_1 - a_2, a_2 - a_3, \dots, a_n - a_{n+1}, \dots$ ;

c)  $a_1 + 2, a_2 + 2, \dots, a_n + 2, \dots$ ;

d)  $p \cdot a_1, p \cdot a_2, \dots, p \cdot a_n, \dots$ , unde  $p \in \mathbb{N}^*$ ;

e)  $a_1 a_2^p, a_2 a_3^p, \dots, a_n a_{n+1}^p, \dots$ , unde  $p \in \mathbb{N}^*$ ;

f)  $\sqrt{\frac{1}{a_1}}, \sqrt{\frac{1}{a_2}}, \sqrt{\frac{1}{a_3}}, \dots, \sqrt{\frac{1}{a_n}}, \dots$ ;

g)  $a_1, a_4, a_7, \dots, a_{3n-1}, \dots$ .

□41. Să se calculeze sumele:

a)  $1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots1}_{n \text{ cifre}}$ ; b)  $5 + 55 + 555 + \dots + \underbrace{555\dots5}_{n \text{ cifre}}$ .

□42. Dacă  $(u_n)$  este progresie geometrică cu rația  $q \neq \pm 1$ , atunci are loc egalitatea:

$$\frac{u_1 u_2}{u_1 + u_2} + \frac{u_2 u_3}{u_2 + u_3} + \dots + \frac{u_{n-1} u_n}{u_{n-1} + u_n} = \frac{u_1 q (q^n - 1)}{q^2 - 1}$$

□43. Dacă  $(v_n)$  este progresie geometrică cu  $v_1 > 0$  și rația  $q > 1$ , să se arate că:

$$\frac{\sqrt{v_2}}{\sqrt{v_2} - \sqrt{v_1}} + \frac{\sqrt{v_3}}{\sqrt{v_3} - \sqrt{v_2}} + \dots + \frac{\sqrt{v_n}}{\sqrt{v_n} - \sqrt{v_{n-1}}} = n \cdot \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q} - 1}$$

### 2.3. APLICAȚII

□44. Să se determine  $x \in \mathbb{D}$  astfel încât tripletele de numere să fie în progresie aritmetică:

a)  $x - 1, x + 5, 2x + 8$ ; b)  $3x - 7, 5x - 7, x^2 + 2x - 1$ ;

c)  $2x^2 - 9x - 3, x^2 - 3x - 2, 2x^2 - 11x + 19$ ;

d)  $2x^2 - x - 13, x^2 + x - 4, 2x^2 - 3x + 5$ ;

e)  $5x - 7, (2x - 5)^2, 7x - 3$ .

□45. Să se determine  $x \in \mathbb{D}$  astfel încât tripletele de numere să fie în progresie aritmetică:

a)  $-2x - 1, |2x - 1|, 5 + 2x$ ;

b)  $|3x - 5|, 3x - 2, 6x - 8$ ;

c)  $2x + 5, 9x - 1, |x - 2|$ .

□46. Să se determine  $x \in \mathbb{D}$  astfel încât tripletele de numere să fie în progresie aritmetică:

a)  $\frac{1}{x+1}, \frac{5x-2}{7x+1}, \frac{6x-1}{7x+1}$ ;

b)  $\frac{1}{3x-2}, \frac{13}{x+2}, \frac{25}{2x}$ ;

c)  $\frac{2x-3}{2x}, \frac{6x+1}{3x-2}, \frac{10x+5}{2x}$ .

□47. Să se determine  $x \in \mathbb{D}$  astfel încât numerele să fie în progresie aritmetică:

a)  $x + 5, \sqrt{9x + 58}, 2(x + 6)$ ;

b)  $x - 4, \sqrt{5x - 9}, x + 2$ ;

c)  $4x - 5, \sqrt{7x^2 + 8}, 5x - 1$ ;

d)  $\left[\frac{3x+1}{5}\right], 2x+1, 4x+1$ ;

e)  $\left[\frac{3x}{x+1}\right], 4x-1, \left[\frac{5}{x}\right], x \in \mathbb{N}$ .

□48. Numerele  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sunt în progresie aritmetică. Să se determine numărul acestora dacă:

- a)  $a_n = 55, a_5 + a_2 = 32,5, S_{15} = 412,5$ ;  
 b)  $a_5 + a_9 = 16, S_{15} = 131,25, a_n = 44,75$ ;  
 c)  $S_5 = 6,(6), a_4 \cdot a_{10} = 6,(1), S_n = 76,(6)$ ;  
 d)  $S_4 = 48, S_{11} = 286, S_n = 240$ .

□49. Să se rezolve ecuațiile:

- a)  $2 + 7 + 12 + 17 + \dots + (4 + x) = 6477$ ;  
 b)  $1 + 4 + 7 + \dots + x = 117$ ;  
 c)  $1 + 8 + 15 + \dots + x = 3075$ ;  
 d)  $(3x - 1) + (3x - 4) + (3x - 7) + \dots + (2x - 58) = 790$ ;  
 e)  $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2} + \dots + \left(x - \frac{5}{2}\right) = 840,5$ ;  
 f)  $\left(x + \frac{1}{4}\right) + \left(x + \frac{9}{4}\right) + \left(x + \frac{17}{4}\right) + \dots + \left(x + \frac{121}{4}\right) = 340$ ;  
 g)  $\left(3x - \frac{5}{2}\right) + \left(3x - \frac{11}{2}\right) + \left(3x - \frac{17}{2}\right) + \dots + \left(3x - \frac{119}{2}\right) = 790$ ;  
 h)  $\frac{x-2}{x} + \frac{x-4}{x} + \frac{x-6}{x} + \dots + \frac{2}{x} = 12$ .

□50. a) Numerele  $x^2 - 4x - 1, 2x - 3, x^2 - 3x, 4x - 7$  sunt în progresie aritmetică. Să se determine  $x$  și cele 4 numere.

b) Aceeași cerință pentru numerele:  $4y^2 - 7, 5y^2 - 18, 5 - 3y, 4 - 2y^2$ .

□51. Numerele  $x + 3y + 1, 3x + 2y, 2(x + 1) + y, 6x - y - 3$  sunt în progresie aritmetică. Să se determine  $x, y \in \mathbb{Q}$  și cele 4 numere.

□52. Aceeași cerință ca la problema anterioară pentru numerele:

- a)  $\{x\} + 1, 2x - 1, \{x\} + 2, 6y - 2x$ ;  
 b)  $\left[x\right] + \frac{1}{3}, 3[x - 4] + 11, x + 1, -2xy$ ;  
 c)  $4[2x - 2], [2x - 2]^2, -2$ .

□53. Numerele 8, 15, 24 pot fi termeni ai unei progresii aritmetice? Dar numerele 5, -4, -12? În caz afirmativ, dați exemplul de o astfel de progresie.

□54. Să se demonstreze că numerele:

- a)  $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{13}$ ;                      b)  $\sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{14}$ ;  
 c)  $\sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{11}$  nu sunt termeni ai unei progresii aritmetice.

□55. Un triunghi dreptunghic are măsurile unghiurilor în progresie aritmetică. Să se determine aria acestuia știind că ipotenuza are lungimea de 20 cm.

□56. O tribună a unui stadion se compune din 41 de rânduri de scaune și pe fiecare rând următor se află cu 10 locuri mai multe decât pe rândul precedent. În ultimul rând sunt 500 de locuri. Câți spectatori pot intra în această tribună?

□57. Să se demonstreze că dacă pătratele lungimilor laturilor unui triunghi sunt în progresie aritmetică, atunci și pătratele medianelor sunt în progresie aritmetică. Reciproc este adevărat?

□58. Câte laturi are un poligon convex dacă măsurile unghiurilor interioare succesive sunt în progresie aritmetică cu primul termen  $100^\circ$  și rația  $10^\circ$ ?

□59. Câte laturi are un poligon convex cu măsurile unghiurilor interioare crescând din  $x^\circ$  în  $x^\circ$ , începând cu măsura  $a^\circ$ , în cazurile:

- a)  $x = 30, a = 30$ ; b)  $x = 28, x = 48$ ; c)  $x = 20, a = 68$ ; d)  $x = 22, a = 65$ .

□60. O sferă care alunecă pe un plan înclinat parcurge în prima secundă 0,2 m, iar în fiecare din secunde următoare cu 0,4 m mai mult decât în secunda precedentă. Ce distanță a parcurs sfera după 30 de secunde?

□61. Un credit bancar de 900 de milioane de lei este rambursat în 5 rate cu valori strict crescătoare, care formează o progresie aritmetică. Dacă primele două rate totalizează cât un sfert din totalul celorlalte două, să se determine valoarea fiecărei rate.

□62. Să se arate că dacă numerele  $a, b, c$  sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele  $a^2 + ab + b^2, a^2 + ac + c^2, b^2 + bc + c^2$  sunt în progresie aritmetică.

□63. Să se arate că dacă numerele  $a, c, b$  sunt în progresie aritmetică, atunci  $(a + 2b)(a + 2c)(b - c) + (b + 2a)(b + 2c)(a - c) = 0$ .

□64. Dacă numerele  $a^2, b^2, c^2$  sunt în progresie aritmetică, atunci și numerele  $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{b+c}$ , respectiv  $\frac{c}{a+b}, \frac{b}{a+c}, \frac{a}{b+c}$  sunt în progresie aritmetică.

□65. Dacă numerele  $a, b, c$  sunt în progresie aritmetică, să se verifice egalitatea  $a^2 + c^2 - b(a + c) = 2(b^2 - ac)$ .

□66. Fie  $a, b, c, d$  numere în progresie aritmetică și  $\alpha = a^2 + bc, \beta = b(a + d), \gamma = c(a + d), \theta = d^2 + bc$ . Să se arate că numerele  $\beta - \alpha, \gamma - \beta, \theta - \gamma$  sunt în progresie aritmetică.

□67. Dacă  $a, b, c, d$  sunt numere întregi, în progresie aritmetică, atunci numărul  $(a - b)^4 + abcd$  este pătratul unui număr întreg.

□68. Fie  $(a_n)$  o progresie aritmetică cu rația  $r$ . Să se exprime în funcție de  $a_1, r$  și  $n$  următoarele expresii:

- a)  $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n}$ ;
- b)  $a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + \dots + a_n a_{n+1}$ ;
- c)  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$ ;
- d)  $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1}}, a_k \neq 0, k \in \mathbb{N}^*$ ;
- e)  $\frac{1}{a_1 a_2 a_3} + \frac{1}{a_2 a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}}, a_k \neq 0, k \in \mathbb{N}^*$ ;
- f)  $a_1 + 2^2 \cdot a_2 + 3^2 \cdot a_3 + \dots + n^2 \cdot a_n$ ;
- g)  $\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}}, a_k > 0, k \in \mathbb{N}^*$ ;

□69. Dacă numerele  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  sunt numere reale nenule în progresie aritmetică, să se arate că:

- a)  $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ ;
- b)  $a_1 + 2a_2 + 2a_3 + \dots + 2a_{n-1} + a_n = (n-1)(a_1 + a_n), n \geq 3$ .

□70. Dacă  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  sunt numere reale pozitive în progresie aritmetică, să se arate că:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}$$

□71. Numerele  $y_1, y_2, \dots, y_n$  sunt în progresie geometrică. Să se determine numărul acestora dacă:

- a)  $y_1 = 3, y_n = 96, S_n = 189$ ;
- b)  $y_1 = 1, y_n = \frac{1}{32}, S_n = \frac{63}{16}$ ;
- c)  $y_1 = 1, y_n = -2048, S_n = -1365$ ;
- d)  $y_n = 384, q = 2, S_n = 765$ .

□72. Numerele  $u_1, u_2, \dots, u_n$  sunt în progresie geometrică. Să se determine numărul acestora dacă:

- a)  $u_1 = 3, u_n = 96, S_n = 189$ ;
- b)  $u_1 = 1, u_n = 2048, S_n = 4095$ ;
- c)  $q = 2, u_n = -128, S_{n-1} = -\frac{255}{2}$ ;
- d)  $q = \frac{3}{2}, u_n - u_1 = \frac{1995}{128}, S_{n-2} = \frac{633}{32}$ .

□73. Să se determine  $x \in \mathbb{D}$  astfel încât fiecare triplet să fie format din numere în progresie geometrică:

- a)  $3x - 8, x + 6, 84 - x$ ;
- b)  $4, 3 + x, x^2 + 5x + 4, 25$ ;
- c)  $4x - 7, 5x - 8, 7x - 10$ ;
- d)  $\frac{x}{2}, x + 1, 1, 5x + 6$ .

□74. Să se determine  $x \in \mathbb{D}$  astfel încât tripletele de numere să fie în progresie geometrică:

- a)  $\frac{x+3}{x-1}, \frac{2x+4}{x-1}, \frac{4x+6}{x-1}, x \neq 1$ ;
- b)  $\frac{2x-1}{2}, \frac{2x-1}{4}, \frac{2x+1}{10x+1}$ ;
- c)  $\frac{x+1}{3}, 3x-1, 5x+1$ ;
- d)  $\frac{x+1}{x+3}, \frac{x+1}{2}, \frac{x+3}{3-x}$ ;
- e)  $\frac{x-3}{x-1}, \frac{x-3}{2}, \frac{x-1}{-2-x}$ .

□75. Există numere reale astfel încât următoarele seturi de numere să fie în progresie geometrică:

- a)  $|2x + 1|, -4, |6x + 5|$ ;
- b)  $3x - 1, |3x + 2|, 24x$ ;
- c)  $x - 1, \sqrt{9x + 6}, 2x$ ;
- d)  $x - 2, \sqrt{5x + 10}, x + 4$ ;
- e)  $\sqrt{x + 3}, \sqrt{x + 6}, \sqrt{x + 18}$ ;
- f)  $6 + \sqrt{x + 5}, \sqrt{x + 5}, -3 + \sqrt{x + 5}$ ;
- g)  $\sqrt{-x + 2} + 1, \sqrt{-5x + 21}, 5 + 3\sqrt{-x + 2}$ ;
- h)  $\left[\frac{3x+1}{5}\right], 2x+1, 4x+1$ ;
- i)  $\left[\frac{3x}{x+1}\right], 4x-1, \left[\frac{5}{x}\right], x \in \mathbb{N}^*$ .

□76. Există numere reale  $x$  astfel încât următoarele triplete de numere să fie în progresie aritmetică:

- a)  $4[x + 2] - 2, [x + 2], \frac{1}{2}$ ;
- b)  $\frac{x-2}{3}, \left[\frac{2x+1}{5}\right], 2\left[\frac{2x+1}{5}\right] - \frac{x-2}{3}$ ;
- c)  $\frac{2x+1}{3}, \left[\frac{7x-2}{5}\right], 2\left[\frac{7x+3}{5}\right] - \frac{2x+7}{3}$ ?

□77. Numerele  $6 + 2y, \sqrt{9x - 2}, 8, 9x - 2$  sunt în progresie geometrică. Să se determine  $x, y$  și cele 4 numere în progresie geometrică.

Algebră • II. FUNCȚII

□78. Numerele  $b_1, b_2, \dots, b_n$  sunt în progresie geometrică. Câte numere sunt dacă:

$$\text{a) } \begin{cases} b_7 - b_5 = 48 \\ b_5 + b_6 = 48; \\ S_n = 1023 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} b_6 - b_4 = 216 \\ b_3 - b_1 = 8 \quad ? \\ S_n = 40 \end{cases}$$

□79. Să se insereze între 9 și 243 două numere reale astfel încât cele 4 numere să fie în progresie geometrică.

□80. Să se insereze între  $\frac{6}{5}$  și  $\frac{2}{135}$  trei numere reale astfel încât cele 5 numere să fie în progresie geometrică.

□81. Să se arate că următoarele numere nu pot fi termeni ai unei progresii geometrice:

a)  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ ; b)  $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{10}$ ; c)  $\sqrt{8}, \sqrt{6}, \sqrt{5}$ .

□82. Să se determine 4 numere reale în progresie geometrică cu proprietatea că suma termenilor de rang par este egală cu 60, iar suma termenilor de rang impar este egală cu 20.

□83. Să se determine 4 numere reale aflate în progresie geometrică, știind că suma termenilor extremi este egală cu triplul mediei aritmetice a termenilor egal depărtați de cei extremi.

□84. Să se determine 6 numere în progresie geometrică știind că al treilea număr este 8, iar suma primelor trei numere este de 9 ori mai mică decât suma celor 6 numere.

□85. Suma a 3 numere raționale în progresie geometrică este egală cu 63, iar suma inverselor acestora este  $\frac{7}{16}$ . Să se găsească aceste numere.

□86. Să se determine 5 numere reale în progresie geometrică dacă suma primelor două numere este  $3\sqrt{2}$ , iar suma primelor trei numere este  $7\sqrt{2}$ .

□87. Să se determine 6 numere în progresie geometrică dacă suma lor este 364, iar raportul termenilor de rang 2 și 4 este  $\frac{1}{9}$ .

□88. O progresie aritmetică cu termenul al doilea egal cu 5 are proprietatea că primul, al treilea și al unsprezecelea termen sunt în progresie geometrică. Să se determine primul termen și rația progresiei aritmetice.

□89. Fie  $(a_n)$  o progresie aritmetică și  $(b_n)$  o progresie geometrică, ambele având primul termen egal cu 3,  $a_4 = b_3$  și  $a_4 + a_6 - a_2 = b_4$ . Să se determine cele două progresii.

□90. Fie  $(a_n)$  o progresie geometrică cu rația 2. Dacă termenilor  $a_1, a_4, a_6$  li se adaugă 18, 34, respectiv 16, numerele obținute sunt în progresie aritmetică. Să se determine progresia  $(a_n)$ .

□91. Să se determine a, b, c, d știind că acestea sunt în progresie aritmetică, iar numerele  $1+a, b-1, c-1, d+3$  sunt în progresie geometrică.

□92. Să se determine trei numere reale a, b, c aflate în progresie aritmetică cu rația r, iar  $a-1, b-1, c+3$  sunt în progresie geometrică cu rația  $r-2$ .

□93. Numerele a, b, c sunt în progresie aritmetică și au suma 21. Știind că numerele  $a+3, b+5, c+13$  sunt în progresie geometrică, să se determine numerele a, b, c.

□94. Fie  $(a_n)$  o progresie aritmetică și  $(b_n)$  o progresie geometrică, având aceeași rație. Știind că  $a_1 = b_1 = 1$  și că numerele  $a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3$  sunt în progresie geometrică, să se determine cele două progresii.

□95. Să se determine numerele reale a, b, c, d aflate în progresie aritmetică știind în plus că numerele  $1+a, b+1, c+3, d+9$  sunt în progresie geometrică.

□96. Să se calculeze sumele:  
a)  $2 + 22 + 222 + \dots + \frac{222\dots 2}{n \text{ cifre}}$ ; b)  $7 + 77 + 777 + \dots + \frac{777\dots 7}{n \text{ cifre}}$ .

□97. Să se arate că numărul A este pătrat perfect dacă:  
a)  $A = \frac{999\dots 9}{n \text{ cifre}} + \frac{94000\dots 0}{n \text{ cifre}} + 9$ ; b)  $A = \frac{999\dots 9}{n \text{ cifre}} + \frac{82000\dots 0}{n \text{ cifre}} + 81$ .

□98. Să se determine  $n \in \mathbb{N}$  din următoarele egalități:

a)  $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2 \cdot 2^n = 131071$ ;

b)  $2^3 + 2^2 + 2 + \dots + 2^{3-n} = \frac{127}{8}$ ;

c)  $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} + \dots + \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^{n-1}} = \frac{57}{128}$ ;

d)  $\frac{5}{4} - \frac{5}{6} + \frac{5}{9} - \frac{10}{27} + \dots + \frac{5 \cdot (-2)^{n-2}}{3^n} = \frac{2315}{2916}$ .

□ 99. Dacă numerele a, b, c sunt în progresie geometrică, să se arate că:

a)  $(a+c)(b+c)(b^2+c^2-bc) = (b^2+c^2)(ab+c^2)$ ;

b)  $a^3 + b^3 + c^3 = a^2b^2c^2 \left( \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right)$ .

□ 100. Să se arate că numerele a, b, c sunt în progresie geometrică dacă și numai dacă:

a)  $(ab+bc+ca)^2 = abc(a+b+c)^3$ ;

b)  $(a^3+b^3+c^3-3abc)^2 = (a^2-bc)^3 + (b^2-ac)^3 + (c^2-ab)^3$ .

### TESTE DE VERIFICARE

#### Testul nr. 1

○ 1. În progresia aritmetică  $(a_n)$  se cunosc  $a_3 = 9$  și  $a_{16} = 87$ . Să se calculeze  $a_1, r, a_n, S_{51}$ .

○ 2. Să se determine numerele  $a_1, a_2, \dots, a_6$  aflate în progresie aritmetică știind că verifică egalitățile: 
$$\begin{cases} a_2 + a_3 = 5 \\ a_3^2 + a_6^2 = 45 \end{cases}$$

○ 3. În progresia geometrică  $(a_n)$  se cunoaște că  $a_3 = 4$  și  $a_9 = 32a_4$ . Să se determine  $a_n$  și  $S_n, n \geq 1$ .

○ 4. Se consideră șirul  $(b_n), b_n = 2(\sqrt{5})^n$ . Să se arate că  $(b_n)$  este progresie geometrică și să se precizeze dacă numărul 1250 este termen al său.

#### Testul nr. 2

○ 1. Să se determine progresia aritmetică  $(a_n)$  știind că 
$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 6 \\ a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = 24 \end{cases}$$

○ 2. Se consideră progresia aritmetică  $(a_n)$  și șirul:

$(b_n), b_n = a_{n-k}^2 - a_n^2, n \geq 1, k \in \mathbb{N}^+, \text{ fixat.}$

Formează  $(b_n)$  o progresie aritmetică?

○ 3. Se consideră progresia geometrică  $(a_n)$  de termeni pozitivi și fie

$$b_n = \frac{a_n + a_{n+1}^2}{1 + a_{n+2}}$$
. Să se arate că șirul  $(b_n)$  este progresie geometrică.

○ 4. Să se arate că numărul  $a = \underbrace{111\dots1}_{n \text{ cifre}} \underbrace{555\dots5}_{n-1 \text{ cifre}}6$  este pătrat perfect.

#### Testul nr. 3

○ 1. Într-o progresie aritmetică  $(a_n)$  suma primilor 4 termeni este egală cu 10, iar suma inverselor acestora este  $\frac{25}{12}$ . Să se determine  $a_1, a_6, S_{10}, a_8 + a_{10}$ .

○ 2. Să se rezolve ecuația  $3x + (3x+2) + (3x+4) + \dots + (3x+100) = 2652$ .

○ 3. Să se determine numerele a, b, c, d în progresie geometrică știind că  $a+d=18$  și  $b+c=12$ .

○ 4. Se consideră șirul  $(a_n)$ , astfel încât  $a_1 = 2$  și  $a_{n+1} = 3a_n + 2$ . Să se determine  $a_n$  știind că există  $\alpha \in \mathbb{Q}$  astfel încât șirul  $(b_n), b_n = a_n + \alpha$  este progresie geometrică.

#### Testul nr. 4

○ 1. Fie  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  o progresie aritmetică. Să se arate că pentru orice  $n \in \mathbb{N}^+$  are loc relația:

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 - \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = \frac{n(n-1)(n+1)r^2}{12}$$

○ 2. Progresia aritmetică  $(a_n)$  este formată din numere naturale. Să se arate că dacă această progresie conține un termen pătrat perfect, atunci ea conține o infinitate de termeni care sunt pătrate perfecte.

○ 3. Numerele  $x-4, 12-x, 3x, 10x-6$  pot fi în progresie geometrică? Dar numerele  $x-8, \sqrt{6x+4}, 3x+2$ ?

○ 4. Să se calculeze suma  $S_n = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right)^2 + \dots + \left(a_n - \frac{1}{a_n}\right)^2$ , unde  $a \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{\pm 1\}$ .

### 3 FUNCȚII. LECTURI GRAFICE

#### 3.1. REPER CARTEZIAN. PRODUS CARTEZIAN

DREPTE ÎN PLAN DE FORMA  $x = m$  sau  $y = m$ ,  $m \in \mathbb{R}$

- 1. Se dau mulțimile  $A = \{-3, 2\}$ ,  $B = \{-2, 0, 3\}$ .
- Să se determine produsele carteziane  $A \times B$ ,  $B \times A$ ,  $A \times A$ ,  $B \times B$ .
  - Să se reprezinte geometric produsele carteziane de la punctul a).
- 2. Pe tabla de șah se află un nebun pe poziția (c, 3), un cal pe poziția (d, 5), un turn pe poziția (f, 7) și regele pe poziția (b, 6).
- Să se scrie toate pozițiile pe care le poate ocupa fiecare piesă la o mutare corectă.
  - Să se scrie produsele carteziane corespunzătoare fiecărei mulțimi de poziții descrisă la a).
- 3. Să se scrie mulțimile A și B știind că:
- $A \times B = \{(2, 3); (3, 2); (1, 2); (2, 2); (3, 3); (1, 3)\}$ ;
  - $A \times B = \{(-1, -1); (0, 3); (3, 6); (3, 3); (-1, 3); (-1, 6); (0, 5); (0, 6); (-1, 5); (0, -1); (3, 5); (3, -1)\}$ .
- 4. Se dau mulțimile  $A = \{-2, 3, 2\}$  și  $B = \{x, y, z\}$ . Să se determine mulțimea B astfel încât  $A \times B = B \times A$ .
- 5. Să se reprezinte geometric produsele carteziane  $A \times B$ ,  $B \times A$ ,  $A \times A$ ,  $B \times A$ , dacă:
- $A = [0, 3]$ ,  $B = \{-1, 1, 3\}$ ;
  - $A = \{-3, -2, 0, 1, 2\}$ ,  $B = [-2, 4]$ ;
  - $A = [1, 3]$ ,  $B = [-2, 2]$ .
- 6. Fie  $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ .
- Câte elemente au mulțimile:
    - $B = \{(x, y) \in A \times A \mid x = \text{par}, y = \text{impar}\}$ ;
    - $C = \{(x, y) \in A \times A \mid x : 3, y : 7\}$ ;
    - $D = \{(x, y) \in A \times A \mid x : 4, y : 8\}$ ;
    - $E = \{(x, x+8) \in A \times A \mid x = 3k, k \in \mathbb{N}\}$ ?
  - Care este probabilitatea ca luând la întâmplare două numere a și b din A, primul să fie par, iar al doilea să fie multiplu de 9?

- 7. Fie  $A = \{3\}$ ,  $B = \{a\}$ ,  $C = \mathbb{R}$ .
- Să se descrie mulțimile  $A \times A$ ,  $B \times B$ ,  $A \times B$ ,  $B \times A$ .
  - Să se descrie mulțimile  $A \times C$ ,  $C \times A$ ,  $B \times C$ ,  $C \times B$ .
  - Să se reprezinte grafic mulțimile de la punctele a) și b).
- 8. Fie  $A = \{-2\}$ ,  $B = \{2\}$ ,  $C = [-4, 4]$ .
- Să se descrie mulțimile  $A \times C$ ,  $C \times A$ ,  $B \times C$ ,  $C \times B$ .
  - Să se reprezinte grafic pe același sistem de axe mulțimile de la a).
- 9. Să se reprezinte în plan dreptele caracterizate de ecuațiile:
- $x = 3$ ,  $x = -\frac{9}{2}$ ,  $x = 0$ ;
  - $y = -\sqrt{4}$ ,  $y = \sqrt{3}$ ,  $y = 0$ ;
  - $3x + 2 = 0$ ,  $2 - x = 0$ ,  $15 - 5x = 0$ ,  $6 - \frac{3}{2}x = 0$ ;
  - $y + 4 = 0$ ,  $\sqrt{2}y + \sqrt{8} = 0$ ,  $3y - 9 = 0$ ,  $2 - \frac{1}{3}y = 0$ .

- 10. Se consideră următoarele reprezentări grafice (figura 1).

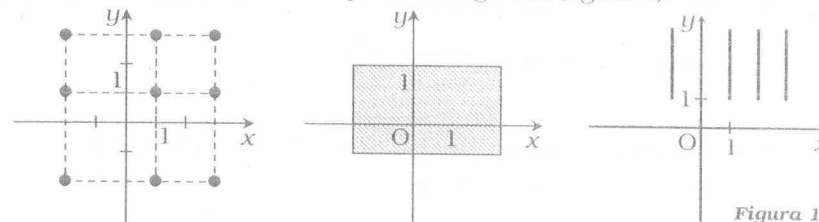


Figura 1

Lecturați graficele și reconstituiți mulțimile care au aceste reprezentări.

- 11. În reperul xOy se consideră mulțimile de puncte din plan  $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$ .
- Să se descrie aceste mulțimi ca produs cartezian și cu ajutorul unei ecuații.
  - Să se determine coordonatele punctelor A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K (figura 2).

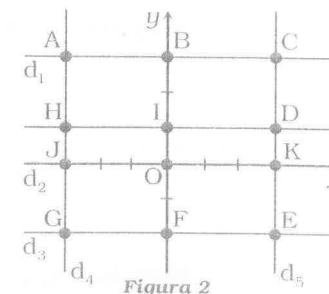


Figura 2

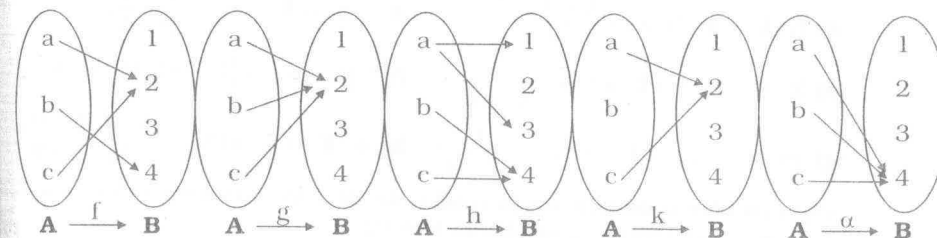
- 12. Se consideră mulțimile:  $A = [-1, 2] \cup [3, 4]$ ;  $B = \{1, 2\} \cup [3, 5]$ .
- Să se descrie mulțimile:  $A \times A$ ,  $B \times B$ ,  $A \times B$ ,  $B \times A$ .
  - Să se reprezinte geometric aceste mulțimi.

- 13. Să se reprezinte geometric mulțimile:  
 a)  $\{-2, 3\} \times \mathbb{R}$ ;  $\mathbb{R} \times \{-2, 2\}$ ;  $\mathbb{R} \times [-1, 3]$ ;  $[-3, 3] \times \mathbb{R}$ ;  
 b)  $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ ;  $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}$ ;  $(-\infty, 0] \times [0, +\infty)$ ;  
 c)  $([-3, -1] \cup [1, 3]) \times \mathbb{R}$ ;  $\mathbb{R} \times (\{-2, 2\} \cup [3, 4])$ .
- 14. Se consideră mulțimea  $A = [-3, 6] \cap \mathbb{Z}$ .  
 Să se determine submulțimile B ale produsului cartezian  $A \times A$  și să se reprezinte geometric:  
 a)  $B = \{(x, y) \mid x = 2y\}$ ;    b)  $B = \{(x, y) \mid x = y + 2\}$ ;  
 c)  $B = \{(x, y) \mid x \text{ divide } y\}$ ;    d)  $B = \{(x, y) \mid |x + y| = 4\}$ .
- 15. Să se determine mulțimile A, B pentru care sunt îndeplinite simultan condițiile:  
 a)  $\{1, 2\} \times B \subset A \times A$ ;    b)  $\{1, 2\} \times A \subset B \times B$ ;  
 c)  $A \times B \subset \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ .
- 16. Se dau mulțimile:  
 $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \exists n \in \mathbb{Z}, x = \frac{3n+10}{n+1}\right\}$ ;  $B = \{x \in \mathbb{D} \mid |x| \geq 1, |x+1| \leq 3\}$ .  
 Să se reprezinte grafic mulțimile  $A \times A$ ,  $A \times B$ ,  $B \times A$ ,  $B \times B$ .
- 17. Se consideră mulțimea  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ . Să se determine cel puțin trei submulțimi  $M \subset A \times A$  cu proprietatea că dacă M conține perechea (a, b), atunci conține și perechea (c, d) astfel încât  $ad = bc$ .
- 18. Să se determine mulțimile A, B știind că  $C \times C \subset A \times B \subset D \times D$ , unde  $C = \{1, 2\}$  și  $D = \{1, 2, 3\}$ .
- 19. Să se determine mulțimile A, B nevide, dacă sunt îndeplinite simultan condițiile:  
 a)  $\{0, 2\} \times B \cap A \times A$ ;  
 b)  $\{1, 2\} \times A \subset B \times B$ ;  
 c)  $A \times B \subset \{0, 1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .
- 20. Să se determine mulțimea A în cazurile:  
 a)  $\{2, 3\} \times A \cap \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ ;    b)  $A \times \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\} \times A$ ;  
 c)  $A \times \{1, 3, 5\} \subset \{1, 3, 5\} \times A$ .

- 21. Fie  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{(x, y) \in A \times A \mid x \leq y\}$ ,  $C = \{(x, y) \in A \times A \mid x = y\}$ ,  
 $D = \{(x, y) \in A \times A \mid x : y \text{ este număr natural}\}$ .  
 Precizați valoarea de adevăr pentru afirmațiile  $C \subset B$ ,  $C \subset D$ ,  $D \subset B$ .
- 22. Se consideră mulțimile:  
 $A = \left\{x \in \mathbb{N}^* \mid \frac{24}{x} \in \mathbb{N}\right\}$ ,  $B = \left\{x \in \mathbb{N}^* \mid \frac{48}{x-2} \in \mathbb{N}\right\}$ ,  $C = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{64}{x+2} \in \mathbb{N}\right\}$ .  
 Câte elemente are mulțimea  $(A \times B) \setminus (A \times C)$ ?
- 23. Se consideră mulțimile:  
 $A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}, x = \frac{3n^2 + 2n + 4}{n^2 + 1}\right\}$  și  
 $B = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{25}{x+2} \text{ și } \frac{100}{x^2 + 16} \text{ sunt numere naturale}\right\}$ .  
 Câte elemente au mulțimile  $A \times B$ ,  $B \times B$ ,  $A \times A$ ?

### 3.2. NOȚIUNEA DE FUNCȚIE

- 24. Se consideră mulțimile  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4\}$  și următoarele corespondențe între elementele celor două mulțimi:



Care dintre aceste corespondențe definesc o funcție?

- 25. Se dau mulțimile  $A = \{a, b, c, d, e\}$  și  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Care dintre următoarele table de valori definesc o funcție  $f : A \rightarrow B$ ?

x	a	b	c	d	e	x	a	b	c	d	e
f(x)	2	3	3	4	5	f(x)	5	5	5	1	1

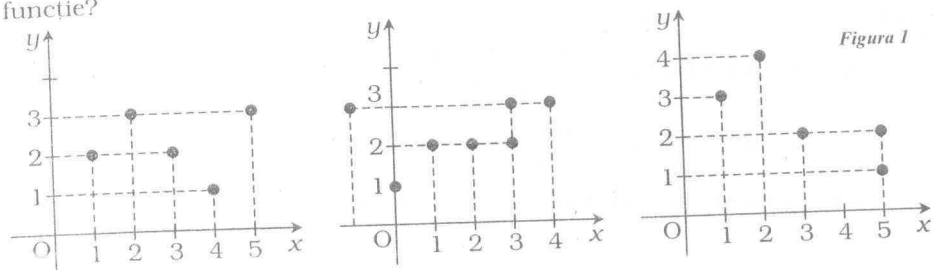
x	a	b	c	d	e	x	a	b	c	d	e
f(x)	1	2	3	4		f(x)	3	1 și 4	2	5	4

□26. a) Câte funcții identice se definesc de la mulțimea  $A = \{1, 2\}$  la  $B = \{-1, 1, 3\}$ ?

b) Folosind diagrama cu săgeți, să se definească toate funcțiile de la  $A$  la  $B$  și de la  $B$  la  $A$ .

c) Aceleași cerințe dacă se folosesc mulțimile  $A = \{0, 1, 2\}$ ,  $B = \{x, y\}$ .

□27. În reprezentările grafice din figura (1) sunt prezentate corespondențele stabilite între elementele a două mulțimi. Care corespondențe reprezintă o funcție?



□28. Care dintre următoarele corespondențe nu sunt funcții:

a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + 4\sqrt{x}$ ;      b)  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2 - 1$ ;

c)  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \frac{x+3}{x-1}$ ;      d)  $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, i(x) = \frac{x^3-1}{x^2+1}$ ;

e)  $k: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, k(x) = \frac{1}{x^3+8}$ ;      f)  $l: [1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty), l(x) = x - 1$ ;

g)  $m: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, m(x) = \frac{1}{x^2-4}$ ;      h)  $n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, n(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ -3x, & x \geq 0 \end{cases}$ ?

Operați câte o modificare în modul de definire a corespondențelor care nu sunt funcții astfel încât să se obțină funcții.

□29. Relația  $y = |x^2 - 7x + 10|$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , definește o funcție  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de argument  $x$ ? Dar de argument  $y$ ?

□30. Fie funcția  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(n)$  este ultima cifră a lui  $8^n$ .

a) Să se calculeze  $f(2), f(7), f(56), f(345), f(2005), f(4961)$ .

b) Să se explicitizeze legea de corespondență a funcției.

□31. Fie funcția  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(x)$  este restul împărțirii lui  $x$  la 5.

a) Să se calculeze  $f(3), f(4), f(-572), f(2456), f(-2033), f(-129)$ .

b) Să se scrie legea de corespondență cu ajutorul formulelor.

□32. Se dau mulțimile  $A = \{-1, 3\}$ ,  $B = \{1, 3, 5\}$  și  $f$  o corespondență între elementele mulțimilor  $A$  și  $B$ ,  $f(x) = m - x$ .

a) Să se determine  $m$  astfel încât  $f$  să fie o funcție de la  $A$  la  $B$ .

b) Există valori ale lui  $m$  astfel încât  $f$  să fie o aplicație a lui  $B$  în  $A$ ?

□33. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [3x + 1] + 2x - 1$ .

Să se determine  $f(-2,4), f(-5)$ ;  $f\left(\frac{5}{3}\right), f\left(\frac{4}{9}\right), f\left(\frac{23}{6}\right), f\left(-\frac{55}{4}\right), f\left(-\frac{2005}{16}\right)$ .

□34. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3x - 4, & x \in (-\infty, 0] \\ 2, & x \in (0, 2) \\ 3 - 2x - 2x^2, & x \in [2, +\infty) \end{cases}$ .

a) Să se determine  $f(2), f\left(\frac{1}{5}\right), f\left(-\frac{1}{5}\right), f(4,3), f\left(-\frac{14}{3}\right), f\left(\frac{7}{4}\right)$ .

b) Să se determine preimaginile elementelor  $-9, -21, 2$ .

□35. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 4x, & x \in (-\infty, 1] \\ 2, & x \in (1, 3) \\ 2x - x^2, & x \in [3, +\infty) \end{cases}$ .

a) Să se determine imaginile prin funcția  $f$  ale argumentelor:

$4, \frac{5}{2}, -4, \frac{18}{5}, -\frac{21}{4}, -6, 7, 5, 2, \frac{1}{5}, \frac{45}{43}, 0, 16$ .

b) Să se determine preimaginile numerelor reale:

$-3, \frac{3}{2}, 2, -2, 0, -15, 1, 2, \frac{1}{4}$ .

□36. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4, & x \in (-\infty, -1] \\ 2x + 1, & x \in (-1, 1) \\ 3x - 6, & x \in [1, +\infty) \end{cases}$ .

a) Calculați imaginile prin  $f$  ale argumentelor  $\frac{1}{2}, 3, -\frac{5}{\sqrt{3}}, -\sqrt{2}, 8$ .

b) Care sunt preimaginile numerelor  $\frac{1}{2}, 0, -1, \frac{13}{3}$ ?

c) Să se determine  $n \in \mathbb{N}$  astfel încât  $f(1) + f(2) + \dots + f(n) = 105$ .

□37. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ .

a) Să se calculeze  $f(-5), f(-3), f(-2), f(0), f(2), f(4)$ .

b) Care este preimaginea numerelor  $\frac{1}{32}$ ; 0,25; 512;  $2^{10}$ ? Dar a numerelor  $-2^4$ ,  $-2^5$ ?

c) Să se determine  $n \in \mathbb{N}$  pentru care:

$$f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(n) + f(n+1) = \frac{4095}{2048},$$

$$\text{respectiv } f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(n+1) = 2^{66}.$$

□38. Se dă funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (4m - 5)x + 3$ . Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  în cazul:

a) preimaginea prin  $f$  a elementului  $-6$  este 1.

b) preimaginea prin  $f$  a elementului 25 este 2.

□39. Se dă funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

Să se determine legea de corespondență a funcției dacă:

a)  $f(1) = 6$ ,  $f(-2) = 21$  și  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{19}{4}$ ;

b)  $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{9}$ ,  $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{27}{4}$  și  $f(2) = 7$ .

□40. Se asociază fiecărui element  $x \in \{-2, -1, 0, 1\}$  numărul  $x^2 - 1$  și fiecărui element  $x \in \{-1, 1, 2, 5\}$  numărul  $x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ . Se definește astfel o funcție de la  $\{-2, -1, 0, 1, 2, 5\}$  la  $\mathbb{R}$ ? Dar dacă se asociază fiecărui element  $x \in \{-2, -1, 0, 1\}$  numărul  $x^2 - 1$  și fiecărui element  $x \in \{-1, 1, 2, 5\}$  numărul  $x^3 - 5x^2 - x + 5$ ? În cazul afirmativ să se scrie legea de corespondență a funcției.

□41. Fie  $M = \{m \in \mathbb{Z} \mid m = 3a + 4b, a, b \in \mathbb{Z}\}$ . Se asociază fiecărui număr  $m = 3a + 4b$  numărul  $m_1 = 3a - 4b$ . Să se analizeze dacă această corespondență definește o funcție pe  $M$  cu valori în  $M$ .

□42. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3, & x \in \mathbb{Z} \\ 3x - 1, & x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \\ \frac{1}{x-1}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ .

a) Să se determine mulțimea  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2f(x) - x = 5\}$ .

b) Să se calculeze  $\frac{f\left(\frac{1}{3}\right) + f(3)}{f(1 + \sqrt{3}) - f(1 - \sqrt{3})}$ .

□43. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \pi, & x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \\ \frac{x+1}{5}, & x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{200}) \\ -1, & x \in [\sqrt{200}, +\infty) \end{cases}$ .

Să se determine mulțimile  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{Z}\}$  și  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) > 2\}$ .

□44. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x+5}{x-3}$ . Să se determine mulțimile  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid f(x) \in \mathbb{Z}\}$  și  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{Z}\}$ .

□45. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  care verifică relația  $f(3x+2) = x^2 + 3x - 1$ . Să se calculeze  $f(3)$ ,  $f(-4)$ ,  $f(0)$ ,  $f(x)$ .

□46. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  care verifică relația  $f\left(a + \frac{1}{a}\right) = a^2 + \frac{1}{a^2}$ ,  $a \neq 0$ . Să se calculeze imaginile prin funcția  $f$  a numerelor 2,  $-2$ ,  $\sqrt{8}$ ,  $-\sqrt{20}$ ,  $\sqrt{13}$ .

□47. Se dă funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \leq a \\ \frac{4x-5}{3}, & x > a \end{cases}$ . Să se determine valorile lui  $a$  pentru care are loc egalitatea  $3a^2 - a - 3 = f(2)$ .

□48. Se dau funcțiile  $f, g: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^7 - x^3$ ,  $g(x) = x^3 - x$ . Să se arate că  $f = g$ .

□49. Fie funcțiile  $f, g: \{-2, -1, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ ,  $g(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 4$ .  
Sunt egale funcțiile  $f$  și  $g$ ?

□50. Se consideră funcțiile  $f$  și  $g$ :  
 $f(x) = \sqrt{x+7+6\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}}$ ,  $x \geq 2$ ,  $g(x) = \begin{cases} 6, & 2 \leq x \leq 11 \\ 2\sqrt{x-2}, & x > 11 \end{cases}$ .  
Să se studieze dacă  $f = g$ .

□51. Se consideră funcțiile  $f, g: \{-2, -1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \in \{-2, -1\} \\ 5x-12, & x \in \{0, 1\} \end{cases}$ ,  
 $g(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 1, & x \in \{-2, -1\} \\ x^2 + 4x - 12, & x \in \{0, 1\} \end{cases}$ .

- a) Să se determine  $f(\{-2, -1, 0, 1\})$  și  $g(\{-2, -1, 0, 1\})$ .  
 b) Sunt egale funcțiile  $f$  și  $g$ ?

□52. Se dă funcția  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $f(x) = \max(x-3, 5x+2)$ .  
 Să se găsească o funcție  $g$  egală cu funcția  $f$ .

□53. Se consideră funcțiile  $f, g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ :  

$$f(x) = x^2 - 2x - 3, g(x) = \begin{cases} (x+1)(x-3), & x \in \mathbb{D} \setminus A \\ x^2(x-5) - 3(1-x), & x \in A \end{cases}$$
 Să se determine submulțimile  $A$  ale lui  $\mathbb{D}$  astfel încât  $f = g$ .

□54. Se consideră funcțiile  $f, g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $f(x) = ax + b$ ,  $g(x) = cx + d$ . Să se arate că dacă există  $x_1, x_2 \in \mathbb{D}$ ,  $x_1 \neq x_2$ , astfel încât  $f(x_i) = g(x_i)$ ,  $i = \{1, 2\}$ , atunci  $f = g$ .

□55. Se consideră funcțiile  $f, g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $g(x) = mx^2 + nx + p$ . Să se arate că dacă există numerele distincte  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{D}$ , cu  $f(x_i) = g(x_i)$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , atunci  $f = g$ .

□56. Se consideră funcțiile  $f, g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $f(x) = |x|$ ,  $g(x) = ax + b$ . Să se arate că nu există  $a, b \in \mathbb{D}$  pentru care  $f = g$ .

□57. Fie  $A = \{2n-1 \mid n \in \mathbb{N}^*\}$  și funcțiile  $f, g: A \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $f(x) = u(2^x)$ ,  $g(x) = u(8^{x^2})$ . Să se arate că  $f = g$ .

□58. Se consideră șirul  $(a_n)$  cu termenul general  $a_n = 3(1+(-1)^n) \cdot (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ ,  $n \geq 1$  și funcțiile  $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  date de  $f(n) = u(2^n)$ ,  $g(n) = u(8^n) + a_{n+1}$ . Să se demonstreze că  $f = g$ .

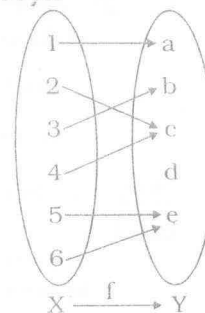
□59. Să se arate că funcțiile  $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(n) = u(4^n)$ ,  $g(n) = u(u(2^n) \cdot u(7^n))$  sunt egale.

□60. Se consideră funcțiile  $f, g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $f(x) = x^2 + ax + b$ ,  $g(x) = x^2 + cx + d$ , unde  $a, b, c, d \in \mathbb{D}$ . Să se arate că dacă există  $x_0 \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{Q}$  cu proprietatea că  $f(x_0) = g(x_0)$ , atunci funcțiile  $f$  și  $g$  sunt egale.

### 3.3. IMAGINEA ȘI PREIMAGINEA UNEI MULȚIMI PRINTR-O FUNCȚIE GRAFICUL FUNCȚIEI. RESTRICȚII ALE UNEI FUNCȚII

□61. Fie funcția  $f$  definită de diagrama de mai jos și mulțimile  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{6\}$ ,  $C = \{1, 3, 4, 5\}$ ,  $D = \{a, b, c\}$ ,  $E = \{c, e\}$ ,  $F = \{d, e\}$ .

a) Să se determine imaginile mulțimilor  $X, A, B$  și  $C$  prin funcția  $f$ .  
 b) Să se determine preimaginile mulțimilor  $D, E, F$  și  $Y$  prin funcția  $f$ .



□62. Se dă funcția  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $f(x) = 2x + 1$ .

a) Să se determine imaginile prin funcția  $f$  ale mulțimilor:

$$A = [-1, 5], B = [2, +\infty), C = (-\infty, 0), D = [-1, 1] \cup (2, 6), E = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{6} \right\}.$$

b) Să se determine preimaginile prin funcția  $f$  ale mulțimilor:

$$M = [-3, 1], N = (0, +\infty), P = (-\infty, -2], S = \{7\}, U = \{-5, -11\}.$$

□63. Se dă funcția  $g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $g(x) = -4x$ .

a) Să se determine imaginile prin  $g$  ale mulțimilor  $[-1, 3]$ ,  $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ ,

$$\left(-\frac{3}{2}, +\infty\right), \left(-\infty, \frac{5}{4}\right], \left\{ \frac{7}{4}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2} \right\}.$$

b) Să se determine preimaginile prin funcția  $g$  ale mulțimilor  $(-\infty, 2]$ ,

$$(-8, +\infty), [-6, 12], \left[-\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right], \left\{ \frac{1}{4}, -2, \{-3, 12\} \right\},$$

unde  $\{3, 12\}$  reprezintă partea fracționară.

□64. Se consideră funcția  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $f(x) = ax + b$ ,  $a \neq 0$ ,  $a, b \in \mathbb{D}$ . Să se determine legea de corespondență știind că:

a)  $f([-1, 3]) = [-8, 4]$ ;                      b)  $f\left(\left[\frac{1}{5}, 2\right]\right) = [-2, 7]$ ;

c)  $f([-4, 3]) = [3a + b, -4a + b]$ ;        d)  $f([a, b]) = [0, 4]$ .

□65. Se dă funcția  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $f(x) = ax + b$ ,  $a, b \in \mathbb{D}$ . Să se determine legea de corespondență știind că:

a)  $f^{-1}([-1, 3]) = [-3, -1]$ ;                      b)  $f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right]$ ;

c)  $f^{-1}([-2, 4]) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ .

□66. Fie funcția  $f: \{-1, 0, 1, 2, \sqrt{6}, -\sqrt{3}\} \rightarrow \{-4, -3, -2, \sqrt{2}, 3\}$  descrisă de următorul tabel de valori:

$x$	-1	0	1	2	$\sqrt{6}$	$-\sqrt{3}$
$f(x)$	$\sqrt{2}$	-2	$\sqrt{2}$	-2	3	3

Să se scrie mulțimea  $G_f$ .

□67. Fie funcția  $f: A \rightarrow B$  al cărei grafic este mulțimea:

$$G_f = \{(-3, -1), (-1, 2), (1, 3), (0, 2), (3, 3)\}.$$

a) Să se determine mulțimile A, B cu număr minim de elemente și legea de corespondență.

b) Să se dea exemplu de mulțimi B cu 5 elemente.

□68. Fie funcția  $f: [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = [x+1] - 3$ .

a) Să se determine mulțimea de valori a funcției.

b) Să se scrie mulțimea  $G_f$ .

c) Perechile  $\left(-\frac{1}{2}, -3\right), \left(\frac{4}{5}, -2\right), \left(-\frac{1}{3}, -2\right), \left(\frac{10}{3}, 2\right), \left(\frac{11}{5}, -1\right), \left(\frac{7}{2}, 1\right), \left(\frac{3}{2}, -1\right)$

sunt elemente ale mulțimii  $G_f$ ?

□69. Se dă funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (2m+5)x - 6m - 1$ .

Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  astfel încât:

a)  $(1, 1+7m^2) \in G_f$ ;

b)  $(m, 2m+1) \in G_f$ .

□70. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (m-2)x + 3m - 1$ . Să se determine legea de corespondență a funcției în cazurile:

a)  $(3, -4) \in G_f$ ;      b)  $(1-m, 2m-8) \in G_f$ ,  $m > -\frac{1}{2}$ .

□71. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (m-1)x^2 - (3m+1)x + 3$ . Să se verifice dacă perechile  $(-1, 12)$ ,  $(0, 3)$ ,  $\left(\frac{5}{2}, -\frac{33}{4}\right) \in G_f$  știind că  $(4, -2m^2 - 1) \in G_f$ .

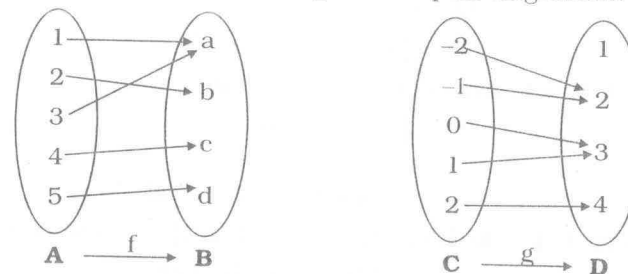
□72. Graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$  conține elementele  $(1, 4)$ ,  $(-1, 14)$ ,  $(3, 10)$ . Să se verifice dacă perechile  $\left(\frac{1}{2}, 5\right)$ ,  $\left(-\frac{3}{2}, 18\right)$  și  $\left(\frac{3}{4}, \frac{35}{8}\right)$  sunt elemente ale mulțimii  $G_f$ .

□73. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \left[\frac{2x+m}{4}\right] + \frac{3x-1}{2}$ . Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  astfel încât perechea  $(m, 3)$  să fie element al mulțimii  $G_f$ .

□74. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x-1}{3} - \left[\frac{7x-2}{5}\right]$ . Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  astfel încât  $(m, 0) \in G_f$ .

□75. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2m-7}{m-1}x - 2$ ,  $m \neq 1$ . Știind că perechea  $(m, f(m)) \in (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) \times (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$ , să se decidă care dintre perechile  $\left(-\frac{1}{3}, -3\right)$ ,  $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ ,  $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{3}-2\right)$ ,  $(\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$  sunt elemente ale graficului funcției.

□76. Se dau funcțiile  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: C \rightarrow D$  prin diagramele:



a) Să se determine restricțiile funcției f la mulțimile  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{1, 3, 5\}$ ,  $\{2, 4\}$ .

b) Să se determine restricțiile funcției f la mulțimile  $\{-2, -1\}$ ,  $\{0, 1, 2\}$ ;  $\{-2, -1, 0, 1\}$ .

□77. Fie funcția  $f: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x+3}$ .

a) Să se scrie două restricții ale funcției f.

b) Să se determine  $a \in \mathbb{Z}$  astfel încât funcția  $g: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , să reprezinte o extensie a funcției f la intervalul  $[a, +\infty)$ .

□78. Fie funcția  $f: (-5, 5) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{25-x^2}$ . Funcția  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este o restricție a funcției f la intervalul  $[a, b]$ .

a) Să se determine  $a, b \in \mathbb{Z}$  astfel încât să aibă loc relația  $4a^2 = 12 + b^2$ .

b) Se poate găsi o prelungire a funcției f? Exemplificare.

### 3.4. FUNCȚII NUMERICE

□79. Fie funcția  $f: \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + 1$ . Să se determine mulțimea  $G_f$  și să se reprezinte geometric.

□80. Să se traseze curba  $G_f$  asociată funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , știind că:

a)  $f(x) = -3$ ; b)  $f(x) = 0$ ; c)  $f(x) = \frac{3}{2}$ ; d)  $f(x) = 2m + 1$ ,  $m \in \mathbb{R}$ .

□81. Să se traseze curba  $G_f$  pentru funcțiile:

a)  $f: [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 4$ ;

b)  $g: [-3, -1] \cup [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2$ ;

c)  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \begin{cases} -3, & x \in (-\infty, -2] \\ 0, & x \in (-2, 2) \\ 2, & x \in [2, +\infty) \end{cases}$  ;

d)  $k: [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k(x) = \begin{cases} [x], & x \in [-5, -3] \\ 1, & x \in (-3, 0) \\ [x+2], & x \in [0, 5] \end{cases}$

□82. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x+3, & x \in (-\infty, -2] \\ 2, & x \in (-2, 1) \\ 7x-2, & x \in [1, +\infty) \end{cases}$ . Să se determine punctele de intersecție dintre curba  $G_f$  și axele Ox și Oy.

□83. Se consideră funcția  $f: (-6, 6) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \left[\frac{x}{2} - 3\right]$ .

a) Să se determine graficul funcției  $f$ .

b) Să se reprezinte grafic curba  $G_f$  și să se precizeze mulțimea  $G_f \cap Ox$ ,

$G_f \cap Oy$ .

□84. Să se determine intersecția curbei  $G_f$  cu axele Ox și Oy în cazurile:

a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{4}{3}x - 10$ ; b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x(5x+2) + x - 2$ ;

c)  $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{8x^2 + \sqrt{3}(2x - \sqrt{3})}{x-2}$ ;

d)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |5x - 2| - 8$ ; e)  $f: \left[-3, \frac{5}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{15 - x(2x+1)}$ .

□85. Să se determine punctele de intersecție dintre  $G_f$  cu axele Ox și Oy pentru funcțiile:

a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \left[\frac{x+3}{4} - \frac{x-3}{5}\right]$ ; b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \left[\frac{4x+1}{5} - \frac{5x-1}{4}\right]$ ;

c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \left[\frac{x+13}{6} - \frac{x+20}{7}\right]$ .

□86. Să se determine funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax + b$ , dacă:

a)  $G_f \cap Ox = \{A(3, 0)\}$ ;  $G_f \cap Oy = \{B(0, 5)\}$ ;

b)  $G_f \cap Ox = \{A(-1, 0)\}$ ;  $G_f \cap Oy = \{B(0, 4a+1)\}$ ;

c)  $G_f \cap Ox = \left\{A\left(\frac{2a+1}{2}, 0\right)\right\}$ ;  $G_f \cap Oy = \left\{B\left(0, -\frac{3}{2}\right)\right\}$ ;

d)  $G_f \cap Ox = \left\{A\left(\frac{2a-1}{3}, 0\right)\right\}$ ;  $G_f \cap Oy = \{B(0, 4-3a)\}$ .

□87. Să se determine funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{(m-1)x^2 - mx + 1}{x^2 + n^2}$ , dacă  $G_f$  intersectează axa Ox în punctul cu abscisa 3 și axa Oy în punctul cu ordonata  $\frac{1}{9}$ .

□88. Se dă funcția  $f: \mathbb{R} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{(3a-1)x + b - 4}{x-a}$ . Să se verifice dacă punctul  $M(4, 14) \in G_f$ , știind că:

$G_f \cap Ox = \left\{A\left(\frac{4-6a}{5}, 0\right)\right\}$ ,  $G_f \cap Oy = \{B(0, a-6)\}$ .

□89. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (2m+1)x^2 - (4m-1)x + 2m+1$ .

Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  astfel încât:

a) mulțimea  $G_f \cap Ox$  să aibă un singur element;

b) mulțimea  $G_f \cap Ox$  să aibă două elemente.

# 4 PROPRIETĂȚI GENERALE ALE FUNCȚIILOR

## 4.1. FUNCȚII MĂRGINITE

□1. Să se arate că următoarele funcții sunt mărginite:

a)  $f: \{-1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{2004}$ ;

b)  $f: \{x \in \mathbb{Z} \mid |x-1| \leq 2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + (-1)^x$ ;

c)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{5 + 3 \cdot (-1)^n}{2}$ ;

d)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = \text{ultima cifră a lui } 7^n$ ;

e)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = \frac{2n+1+(-1)^n}{2n+2}$ ;

f)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = \text{restul împărțirii lui } n^2 \text{ la } 4$ ;

g)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = \min(n, 10)$ ;

h)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = \frac{n+20-|n-20|}{2}$ .

□2. Să se arate că funcțiile următoare sunt funcții mărginite:

a)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = \text{c.m.m.d.c.}(n, 2004)$ ;

b)  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = \min\left(n + \frac{1}{n}, 2\right)$ ;

c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1}$ ;

d)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - [x]$ ;

e)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ;

f)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ ;

g)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x \in [-1, 1] \\ \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \end{cases}$

□3. Să se studieze mărginirea funcțiilor:

a)  $f: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 4$ ;

b)  $f: (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + |x|$ ;

c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+1}$ ;

d)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2 + x - [x]$ ;

e)  $f: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - |x|$ ;

f)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x-1, & |x| \leq 1 \\ \frac{2}{x}, & |x| > 1 \end{cases}$

□4. Să se arate că următoarele funcții sunt nemărginite:

a)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = n + (-1)^{n+1}$ ; b)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = \max(n, 2004)$ ;

c)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = n \cdot (-1)^n$ ; d)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = \text{c.m.m.m.c.}(n, 2004)$ ;

e)  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ ; f)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ .

□5. Să se determine valorile parametrilor reali pentru care funcția  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  este funcție mărginită:

a)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = an + b$ ; b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} ax, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ ;

c)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = a \left[ \frac{n}{2} \right] + (-1)^n$ ; d)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3\{x\} - a[x]$ .

□6. Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  pentru care funcția:

$f: \{x \in \mathbb{R} \mid [x] = 1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{a}{x-2} + x$  este funcție mărginită.

□7. Să se arate că următoarele funcții sunt nemărginite:

a)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = 3n + (-1)^n$ ; b)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = n + \left[ \frac{n}{2} \right]$ ;

c)  $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x-1}$ ; d)  $f: \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left\{x\right\} = \frac{1}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$ ;

e)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ -x, & x > 0 \end{cases}$ ; f)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$ .

□8. Să se studieze mărginirea funcției  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$  dată de  $f(n) = \text{soluția pozitivă a ecuației } x^2 + 2x - n^2 = 0$ .

□9. Să se studieze mărginirea funcției  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ , cu proprietatea că  $f(n) = [x]$ , unde  $x$  este soluție a ecuației  $[nx] = n^2$ .

## 4.2. FUNCȚII PARE. FUNCȚII IMPARE

□10. Să se studieze paritatea funcțiilor:

a)  $f: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - x$ ;

b)  $f: \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (-1)^x$ ;

c)  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = x \cdot (-1)^x$ ; d)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - x$ ;

e)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \cdot |x|$ ; f)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \{x\} + \{1-x\}$ ;

g)  $f: \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 2\}, f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ ; h)  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = \max\{-n, n\}$ .

□ 11. Să se studieze paritatea funcțiilor  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

a)  $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases};$       b)  $f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leq 1 \\ |x|, & |x| > 1 \end{cases};$

c)  $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 1 \\ 1-x, & x > 1 \end{cases};$       d)  $f(x) = \text{sign}(x).$

□ 12. Să se determine constantele reale pentru care funcțiile date sunt funcții pare sau funcții impare:

a)  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = n^2 + a \cdot (-1)^n;$       b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + ax + 2;$

c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + x + a;$       d)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x - a|;$

e)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x| + |x - a|;$       f)  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = a \cdot [n - \sqrt{n^2 + 1}].$

□ 13. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție reală. Să se studieze paritatea funcțiilor  $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , date de  $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$

□ 14. Să se studieze paritatea funcțiilor  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

a)  $f(x) = \max(x, 0) + \max(-x, 0);$       b)  $f(x) = \max(x, 0) - \max(-x, 0);$

c)  $f(x) = \min(x, 0) + \min(-x, 0);$       d)  $f(x) = \min(x, 0) - \min(-x, 0);$

e)  $f(x) = \max(-x, 0) + \min(x, 0);$       f)  $f(x) = \begin{cases} \max(x, -x), & |x| \leq 1 \\ \min(x, -x), & |x| > 1 \end{cases};$

g)  $f(x) = \begin{cases} \min(x, 1), & |x| \geq 1 \\ \max(x, -x), & |x| < 1 \end{cases};$       h)  $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1 \\ \text{sign}(x), & |x| > 1 \end{cases}.$

□ 15. Să se demonstreze că oricare funcție  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  se poate scrie sub forma  $f(x) = g(x) + h(x)$ , unde  $g$  este funcție pară și  $h$  este funcție impară.

□ 16. Să se scrie funcția  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  ca sumă a două funcții cu parități diferite, în cazurile:

a)  $f(x) = |x|, D = \mathbb{R};$       b)  $f(x) = x^2 + x, D = [-1, 1];$

c)  $f(x) = [x], D = [-4, 4];$       d)  $f(x) = \{x\}, x \in [-2, 2].$

□ 17. Să se arate că dreapta  $x = 1$  este axă de simetrie pentru graficul funcției  $f$ , în cazul:

a)  $f(x) = x^2 - 2x + 1;$       b)  $f(x) = -2x^2 + 4x + 3;$

c)  $f(x) = |x - 1|;$       d)  $f(x) = \sqrt{|x - 1|};$

e)  $f(x) = x(2 - x);$       f)  $f(x) = \frac{|x - 1|}{x^2 - 2x + 2};$

g)  $f(n) = (-1)^n (2n - n^2), n \in \mathbb{Z}.$

□ 18. Să se determine  $m \in \mathbb{R}$ , pentru care dreapta  $x = 1$  este axă de simetrie a graficului funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , în cazurile:

a)  $f(x) = x^2 + mx + 3;$       b)  $f(x) = |x - m|;$

c)  $f(x) = 2x^2 - 3mx - 1;$       d)  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 + mx + 3.$

□ 19. Să se determine în raport cu ce dreaptă de forma  $x = m$ , este simetric graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , cu proprietatea că:

a)  $3f(x) + 5f(-x) = |x|, \forall x \in \mathbb{R};$       b)  $2f(x) + f(-x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 0 \\ -x, & x > 0 \end{cases}.$

□ 20. Să se arate că punctul  $A(2, 7)$  este centru de simetrie pentru funcțiile:

a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 7;$       b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 7x - 7;$

c)  $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{7x - 13}{x - 2};$       d)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 1;$

e)  $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x^2 - x}{x - 2}.$

□ 21. Să se arate că graficele funcțiilor următoare au același centru de simetrie:

a)  $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{4x - 3}{x - 1};$       b)  $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1};$

c)  $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{-x^2 + 6x - 4}{x - 1};$       d)  $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x - 1}.$

□ 22. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [x]$ . Să se arate că punctul  $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$  este centru de simetrie pentru graficul funcției  $f$ .

□ 23. Să se determine centrul de simetrie pentru graficul funcțiilor:

a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1 \\ \text{sign}(x), & |x| > 1 \end{cases};$

b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x - 1)^7 + 2;$

c)  $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x - 1}.$

□ 24. Să se arate că următoarele funcții au o infinitate de axe de simetrie:

a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2;$       b)  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = (-1)^n;$

c)  $f: \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } [x] \text{ este număr par} \\ 1, & \text{dacă } [x] \text{ este număr impar} \end{cases};$

d)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \left\lfloor x - \left[ x + \frac{1}{2} \right] \right\rfloor.$

□25. Să se determine mulțimea  $A \subset \mathbb{R}$ , cea mai mare cu proprietatea că funcția  $f: \mathbb{R} \setminus A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \cdot (-1)^{[x]}$ , admite axă de simetrie de forma  $x = m$ .

□26. Se consideră funcția  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $f(n) = (-1)^n (an - n^2)$ . Să se arate că există o infinitate de valori ale lui  $a \in \mathbb{Z}$ , cu proprietatea că graficul funcției  $f$ :

- a) are axă de simetrie;  
b) are centru de simetrie.

□27. Să se demonstreze că următoarele funcții au o infinitate de centre de simetrie:

- a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 7$ ;                      b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x + 11$ ;  
c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -7x + 3$ ;              d)  $f: \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = [x]$ ;  
e)  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + 5$ ;              f)  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 4x - 3$ ;  
g)  $f: \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 7 - 3x$ ;        h)  $f: \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \{x\}$ .

□28. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} (-1)^{[x]}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 0, & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ . Să se demonstreze că graficul

funcției  $f$  admite o infinitate de axe de simetrie de forma  $x = m$  și o infinitate de centre de simetrie.

□29. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \setminus A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x - 3$ , unde  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A \neq \mathbb{R}$ .

a) Să se arate ce dacă  $A = \emptyset$ , graficul lui  $f$  admite o infinitate de centre de simetrie.

b) Dacă  $A$  are un singur element sau două elemente, graficul funcției are un singur centru de simetrie.

c) Să se arate că dacă  $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ , atunci graficul lui  $f$  admite un centru de simetrie, dacă și numai dacă un element al lui  $A$  este medie aritmetică a celorlalte două elemente.

d) Să se arate că pentru oricare  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \geq 3$ , există o mulțime  $A$ , cu  $\text{card}(A) = n$ , astfel încât graficul lui  $f$  să admită (să nu admită) centru de simetrie.

e) Să se arate că există o infinitate de mulțimi  $A$  infinite, astfel încât graficul lui  $f$  să admită o infinitate de centre de simetrie.

f) Să se arate că există mulțimi  $A$  astfel încât graficul lui  $f$  să admită exact două centre de simetrie.

□30. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Să se studieze paritatea funcției  $f$  în situațiile:

- a)  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ;  
b)  $f(x + y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 + f(x)f(y)}$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ .

### 4.3. FUNCȚII PERIODICE

□31. Să se demonstreze că următoarele funcții au perioada  $T = 2$  și să se determine apoi perioada principală a acestora:

- a)  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $f(n) = (-1)^n$ ;                      b)  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(n) = \frac{1 + (-1)^n}{2}$ ;  
c)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(n) = u(9^n)$ , ultima cifră a lui  $9^n$ ;  
d)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \{x\}$ ;                      e)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \{x\} \cdot (-1)^{[x]}$ .

□32. Să se determine perioadele principale ale funcțiilor:

- a)  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(n) = u(5^n)$ ;                      b)  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(n) = u(6^n)$ ;  
c)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(n) = u(3^n)$ ;                      d)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(n) = u(7^n)$ ;  
e)  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(n) = u(4^n)$ ;                      f)  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(n) = u(8^n)$ .

□33. Fie  $p \in \mathbb{N}^*$  un număr natural. Notăm  $r_p: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $r_p(n) = \text{restul împărțirii lui } n \text{ la } p$ . Să se stabilească perioadele principale ale funcțiilor:

- a)  $r_2$ ; b)  $r_3$ ; c)  $r_9$ ; d)  $r_{11}$ .

□34. Să se arate că funcția  $f: \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(n) = r_{100}(5^n)$  este funcție periodică.

□35. Să se determine mulțimea  $A \subset \mathbb{N}$ , pentru care funcțiile  $f: A \rightarrow \mathbb{N}$  sunt periodice:

- a)  $f(n) = r_{100}(2^n)$ ;    b)  $f(n) = r_{100}(6^n)$ ;    c)  $f(n) = r_{100}(3^n)$ ;  
d)  $f(n) = r_{100}(9^n)$ ;    e)  $f(n) = r_{100}(4^n)$ ;    f)  $f(n) = r_{100}(7^n)$ .

□36. Să se arate că următoarele funcții sunt periodice:

- a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \left\{ \frac{x}{2} \right\}$ ;                      b)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(n) = \left\{ \frac{n^2}{2} \right\}$ ;  
c)  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(n) = \left\{ \frac{n}{2} \right\} + \left\{ \frac{n}{3} \right\}$ ;                      d)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \left\{ \frac{x+1}{2} \right\}$ ;  
e)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \{x\} + \left\{ \frac{x+1}{2} \right\}$ ;                      f)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \left\{ \frac{x+1}{2} \right\} + \left\{ \frac{x+2}{3} \right\}$ ;  
g)  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \left\{ \frac{x^2 - x}{3} \right\}$ .

□37. Fie  $a_1 < a_2 < \dots < a_k < \dots$  numere naturale nenule. Să se arate că funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sunt funcții periodice:

- a)  $f(x) = \left\{ \frac{x}{a_1} \right\}$ ;                      b)  $f(x) = \left\{ \frac{x}{a_1} \right\} + \left\{ \frac{x}{a_2} \right\}$ ;

c)  $f(x) = \left\{ \frac{x}{a_1} \right\} + \left\{ \frac{x}{a_2} \right\} + \dots + \left\{ \frac{x}{a_k} \right\};$

d)  $f(x) = \left\{ \frac{x}{a_1} \right\} + \left\{ \frac{x+1}{a_2} \right\} + \dots + \left\{ \frac{x+k-1}{a_k} \right\}.$

□38. Să se arate că funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (-1)^{[x]} \left( x - 2 \left[ \frac{x}{2} \right] - 1 \right) + 1$  este funcție periodică cu perioada principală  $T = 2$ .

□39. Să se arate că pentru oricare  $p \in \mathbb{N}^+$ , funcția  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \left\{ \frac{x^2}{p} \right\}$  este funcție periodică.

□40. Să se arate că pentru oricare  $p \in \mathbb{N}^+$ , funcția:

$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \left\{ \frac{x^2}{1} \right\} + \left\{ \frac{x^2}{2} \right\} + \dots + \left\{ \frac{x^2}{p} \right\}$  este periodică.

□41. Să se demonstreze că funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ , este periodică dar nu are perioadă principală.

□42. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție care admite axele de simetrie  $x = a, x = b, a, b \in \mathbb{R}$  distincte. Să se demonstreze că funcția  $f$  este periodică.

□43. Fie  $x \in \mathbb{R}$ . Să se arate că pentru oricare  $n \in \mathbb{N}^+$  are loc egalitatea:

$[x] + \left[ x + \frac{1}{n} \right] + \left[ x + \frac{2}{n} \right] + \dots + \left[ x + \frac{n-1}{n} \right] = [nx].$  (**Relația lui Hermite**)

□44. Să se construiască o funcție  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , care să admită perioada principală  $T$ .

□45. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , o funcție periodică. Să se arate că funcția  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(ax + b), a, b \in \mathbb{R}$ , este funcție periodică.

□46. Se consideră funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , funcții periodice cu perioadele principale  $T_1$  și  $T_2$ . Să se demonstreze că dacă  $\frac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$ , atunci funcțiile  $h, i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = f(x) + g(x)$  și  $i(x) = f(x) \cdot g(x)$  sunt funcții periodice.

□47. Fie  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , astfel încât  $g$  este funcție periodică cu perioada principală  $T$  și  $2f(x) + f(1-x) = g(x), x \in \mathbb{R}$ . Să se demonstreze că funcția  $f$  este periodică.

□48. Se consideră funcția  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  și mulțimea  $A = \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

- a) Să se arate că dacă  $f$  este funcție periodică atunci  $A$  este mulțime finită.
- b) Dacă  $A$  este mulțime finită rezultă că  $f$  este funcție periodică?

□49. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție periodică cu proprietatea că admite ca perioadă oricare număr irațional. Să se demonstreze că  $f$  este constantă.

□50. Să se arate că funcțiile  $f$  sunt periodice:

a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}, f(x+1) = \frac{1}{1-f(x)}, x \in \mathbb{R};$

b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x+1) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}, x \in \mathbb{R}.$

□51. Fie  $a, b \in [0, +\infty)$  și  $f: \mathbb{R} \rightarrow [a, b]$  cu proprietatea că  $f^2(x-a) + f^2(x+a) = b^2, \forall x \in \mathbb{R}$ . Să se demonstreze că  $f$  este funcție periodică.

□52. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție periodică cu perioada principală  $T$ . Să se demonstreze că dacă mulțimea  $\{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$  este infinită atunci  $T \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

#### 4.4. FUNCȚII MONOTONE

□53. Să se arate că funcțiile  $f$  sunt monoton crescătoare pe domeniul de definiție:

a)  $f: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x;$       b)  $f: \{-2, 1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3;$

c)  $f: [-1, 1] \cup [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 2;$       d)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 7x + 4;$

e)  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x+1};$       f)  $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -\frac{x}{x^2+1};$

g)  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x+1};$       h)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + |x-1|.$

□54. Să se studieze monotonia funcțiilor:

a)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = 2n + (-1)^n;$

b)  $f: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = 2n + \text{c.m.m.d.c.}(n, 2);$

c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 4;$

d)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -4x + 5;$

e)  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 + 11;$

f)  $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x + 5;$

g)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [x].$

□55. Să se studieze monotonia funcțiilor:

- a)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = 5n + 2 \cdot (-1)^n$ ;  
 b)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = 3n + \text{c.m.m.d.c.}(n, n+2)$ ;  
 c)  $f: [-5, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$ ;  
 d)  $f: (-\infty, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + 4$ ;  
 e)  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2}{x}$ ;  
 f)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x + 1$ ;  
 g)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x - 1|$ .

□56. Să se determine intervalele de monotonicitate pentru funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

- a)  $f(x) = -6x + 12$ ; b)  $f(x) = -x + 3$ ; c)  $f(x) = 3x - 6$ ; d)  $f(x) = x^2 - 2$ ;  
 e)  $f(x) = x^2 - 2x$ ; f)  $f(x) = x|x|$ ; g)  $f(x) = |x - 3|$ ; h)  $f(x) = x + |2x - 2|$ ;  
 i)  $f(x) = x^2 + 4x + 3$ ; j)  $f(x) = x^2 + |x|$ .

□57. Să se determine intervalele de monotonicitate pentru funcțiile:

- a)  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ ; b)  $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ ;  
 c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ ; d)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x-1}{x^2+x+1}$ ;  
 e)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x-1| + |x-3|$ ; f)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + \text{sign}(x)$ .

□58. Să se arate că următoarele funcții sunt strict monotone:

- a)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = n^2 + 3 + (-1)^n$ ; b)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = 2^n$ ;  
 c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^x$ ; d)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^x + x$ ;  
 e)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^x + 3^x$ ; f)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 2^x$ .

□59. Să se determine cea mai mică valoare a parametrului  $m$  pentru care funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2mx + 3$ , este monoton crescătoare pe intervalul  $[2m+6, +\infty)$ .

□60. Să se determine intervalele de strictă monotonicitate pentru funcțiile:

- a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \{x\}$ ; b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + \{x\}$ ;  
 c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x| + |x-1|$ ; d)  $f: [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ ;  
 e)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \left\{ \frac{x}{3} \right\}$ ; f)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \cdot (-1)^{\{x\}}$ .

□61. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , strict crescătoare pe  $\mathbb{R}$ . Să se demonstreze că următoarele funcții sunt strict crescătoare:

- a)  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x + f(x)$ ;  
 b)  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^3 + 5f(x)$ ;  
 c)  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x) + f(2x)$ ;  
 d)  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x) + f(ax), a \in (0, +\infty)$ .

□62. Să se arate că dacă funcțiile  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ , sunt strict crescătoare (descrescătoare), atunci și funcția  $h: D \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = f(x) + g(x)$ , este strict crescătoare (descrescătoare).

□63. Se consideră funcțiile  $f, g: D \rightarrow (0, +\infty)$  crescătoare (descrescătoare). Să se demonstreze că funcția  $h: D \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = f(x)g(x)$  este crescătoare (descrescătoare).

□64. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție crescătoare.

- a) Să se arate că pentru oricare  $a \in (0, +\infty)$  funcția  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(ax)$  este monoton crescătoare.  
 b) Funcția  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(-x)$  este monoton crescătoare?

□65. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  o funcție monoton crescătoare.

Funcția  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{f(x)}$  este monoton descrescătoare?

□66. Să se arate că dacă funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este periodică și monotonă, atunci  $f$  este funcție constantă.

□67. Să se determine  $a \in \mathbb{R}$ , pentru care funcția  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  este monotonă:

- a)  $f(n) = n + (-1)^n a, D = \mathbb{N}$ ; b)  $f(n) = n^2 + a \cdot (-1)^n, D = \mathbb{N}$ ;  
 c)  $f(x) = x + a \cdot (-1)^{\{x\}}, D = \mathbb{R}$ ; d)  $f(x) = ax^2 + 2x + 1, D = \mathbb{R}$ ;  
 e)  $f(x) = x + a\{x\}, D = \mathbb{R}$ ; f)  $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ ax, & x > 0 \end{cases}$ ;  
 g)  $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 2 \\ 2x+a, & x > 2 \end{cases}$ ; h)  $f(x) = x + a|x|$ .

□68. Să se studieze monotonia funcțiilor  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , în cazurile:

- a)  $2f(x) + f(-x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ ; b)  $f(x) + 3f(1-x) = x, x \in \mathbb{R}$ ;  
 c)  $3f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x, x \in \mathbb{R}^+, f(0) = 0$ .

□69. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Să se demonstreze că funcția  $f$  nu este monotonă pe niciun interval de numere reale.

□70. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

a) Să se demonstreze că funcția  $f$  nu este monotonă pe niciun interval de numere reale  $(a, b)$  care conține originea.

b) Există intervale  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  pe care  $f$  este monotonă?

□71. Se consideră mulțimea  $A = \{1, 2, 3\}$ . Să se determine:

- a) funcțiile strict crescătoare  $f: A \rightarrow A$ ;
- b) funcțiile strict descrescătoare  $f: A \rightarrow A$ ;
- c) funcțiile monotone  $f: A \rightarrow A$ .

□72. Fie  $A$  o mulțime finită și nevidă. Să se determine funcțiile  $f: A \rightarrow A$  strict crescătoare.

□73. Să se arate că orice funcție monotonă se poate scrie ca sumă a două funcții strict monotone.

□74. Fie  $A$  o mulțime nevidă și funcția  $f: A \rightarrow A$ .

- a) Să se arate că dacă  $A = \mathbb{N}$ ,  $f$  nu poate fi strict descrescătoare.
- b) Să se dea exemplu de funcții monoton descrescătoare pentru  $A = \mathbb{N}$  și  $f(0) = 3$ .
- c) Dacă  $A = \mathbb{Z}$ , să se arate că  $f$  poate fi strict descrescătoare.

□75. Să se arate că dacă o funcție este monotonă și pară, atunci ea este funcție constantă.

□76. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție monotonă cu proprietatea că  $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{Q}$ . Să se arate că  $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

## 5 COMPUNEREA FUNCȚIILOR

□1. Se consideră funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Să se determine  $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$ :

- a)  $f(x) = x, g(x) = 2x$ ;
- b)  $f(x) = x - 1, g(x) = -x + 1$ ;
- c)  $f(x) = -x + 2, g(x) = 2x + 1$ ;
- d)  $f(x) = 3x - 1, g(x) = \frac{x+1}{3}$ ;
- e)  $f(x) = \frac{2x-1}{3}, g(x) = \frac{3x+1}{2}$ .

□2. Fie  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Să se determine  $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$ , în cazurile:

- a)  $f(x) = 2x - 1, g(x) = x^2 - 2x$ ;
- b)  $f(x) = x + |x|, g(x) = x - |x|$ ;
- c)  $f(x) = x^2 + 1, g(x) = |x - 1|$ ;
- d)  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, g(x) = x - 1$ .

□3. Să se determine  $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$  pentru funcțiile  $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , în cazurile:

- a)  $f(n) = n + (-1)^n, g(n) = 2n + (-1)^n$ ;
- b)  $f(n) = 3n + (-1)^n, g(n) = 4n - (-1)^n$ ;
- c)  $f(n) = u(2^n), g(n) = 2n$ ;
- d)  $f(n) = u(3^n), g(n) = u(2^n)$ .

□4. Să se determine  $f \circ g$  în cazurile:

- a)  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ x - 1, & x > 0 \end{cases}, g(x) = 2x - 1$ ;
- b)  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & x \leq 1 \\ 2 - x, & x > 1 \end{cases}, g(x) = 4x + 1$ ;
- c)  $f, g: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty), f(x) = \begin{cases} -x + 1, & x < 1 \\ 3x, & x \geq 1 \end{cases}, g(x) = 2x + 2$ .

□5. Se consideră  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + m$ . Să se determine  $m \in \mathbb{R}$ , în cazurile:

- a)  $(f \circ f)(x) = 4x + 6$ ;
- b)  $(f \circ f \circ f)(x) = 8x$ ;
- c)  $(f \circ f)(x) + f(3x) = f(5x) + f(m)$ ;
- d)  $f(2x - 1) + f(2x + 3) = f(4x)$ .

□6. Se consideră funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + m, g(x) = 3x + m - 2$ .

- a) Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  astfel încât  $f \circ g = g \circ f$ .

b) Pentru care valori ale lui  $m \in \mathbb{R}$  are loc egalitatea:  
 $(f \circ f)(x) + 5f(x+m) = (g \circ g)(x) + m + 5x$ ?

□7. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x - 2$ . Să se determine  $\left( \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n \right)(x)$ .

□8. Să se arate că nu există funcții  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , monotone, cu proprietatea că  $(f \circ f)(x) = -x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ .

□9. Fie  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funcții monotone. Să se arate că:

- a) dacă  $f$  și  $g$  au aceeași monotonie, atunci funcția  $f \circ g$  este monoton crescătoare;
- b) dacă  $f$  este crescătoare și  $g$  este descrescătoare, atunci funcția  $f \circ g$  este descrescătoare.

□10. Fie  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Să se demonstreze că:

- a) dacă  $f$  și  $g$  sunt funcții pare, atunci  $f \circ g$  este funcție pară;
- b) dacă  $f$  și  $g$  sunt funcții impare, atunci  $f \circ g$  este funcție impară;
- c) dacă  $f$  este funcție pară și  $g$  este impară, atunci  $f \circ g$  este funcție pară.

□11. Să se studieze monotonia funcțiilor  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $f \circ f$ , în cazurile:

a)  $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 2-x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ ; b)  $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ .

□12. Se consideră funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x + 5$ ,  $g(x) = mx + m - 2$ . Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  cu proprietatea că  $(f \circ g)(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

□13. Se consideră funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (m+1)x - 3$ ,  $g(x) = 5x - n$ . Să se determine valorile lui  $m, n \in \mathbb{R}$  știind că  $(f \circ g)(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

□14. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -4x + 3$ .

Să se determine  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  știind că  $(g \circ f)(x) = -8x - 11, \forall x \in \mathbb{R}$ .

□15. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 5x - 3$ .

Să se determine  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dacă  $(f \circ g)(x) = -10x + 17, \forall x \in \mathbb{R}$ .

□16. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 3x$ .

Să se rezolve ecuația  $(f \circ f)(x) = 4$ .

□17. Să se determine funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , monotone, în cazurile:

- a)  $(f \circ f)(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$  și  $f$  crescătoare;
- b)  $(f \circ f \circ f)(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

□18. Să se calculeze  $f \circ g$  și  $g \circ f$ , dacă:

$f, g: (-1, 1) \rightarrow (-1, 1)$ ,  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ ,  $g(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$ .

□19. Fie  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(n) = 2n$ .

- a) Să se arate că există o infinitate de funcții  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  cu proprietatea că  $(g \circ f)(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}$ .
- b) Există funcții  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  cu proprietatea că  $(f \circ g)(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}$ ?

□20. Fie  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ .

- a) Să se arate că există o infinitate de funcții  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , cu proprietatea că  $(f \circ g)(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}$ .
- b) Există funcții  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  cu proprietatea că  $(g \circ f)(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}$ ?

□21. Să se arate că nu există funcții  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea că:

$(f \circ f)(x) = 3x$  și  $(f \circ f \circ f)(x) = 5x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

□22. Să se determine  $a \in \mathbb{R}$ , cu proprietatea că există funcții  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , astfel încât  $(f \circ f)(x) = 2x$  și  $(f \circ f \circ f)(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$ .

□23. Fie  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  două funcții astfel încât  $(f \circ g)(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ . Să se arate că dacă există  $a, b \in \mathbb{R}$ , cu proprietatea că  $(g \circ f)(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R}$ , atunci  $a = 1, b = 0$ .

□24. Fie funcția  $f: A \rightarrow B$ . Spunem că  $x_0 \in A$  este punct fix al acesteia dacă  $f(x_0) = x_0$ .

- a) Să se arate că dacă  $f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$  are proprietatea că  $(f \circ f)(x) = x, \forall x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , atunci  $f$  are puncte fixe.
- b) Să se arate că dacă  $f: A \rightarrow A$  verifică relația  $(f \circ f)(x) = x, x \in A$  și  $\text{card}(A) = 2n + 1, n \in \mathbb{N}$ , atunci  $f$  admite puncte fixe.

□25. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + [x]$  și  $g_n(x) = \left( \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n \right)(x)$ . Să se determine  $g_n(x)$ .

TESTE DE VERIFICARE

Testul nr. 1

- 1. Se consideră  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (m+1)x + m^2 - 3m$ .
- a) Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  știind că  $A(1, 4)$  aparține graficului funcției.  
 b) Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  știind că  $f(x-1) + 2f(x+1) = 6x - 4$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
- 2. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq a+1 \\ -x+1, & x > a+1 \end{cases}$ . Să se determine  $a \in \mathbb{R}$ , în cazurile:
- a)  $f(5) + a^2 - 6a = 3$ ;  
 b)  $f$  este monoton descrescătoare pe  $[2, +\infty)$ .
- 3. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} |x| + m, & x \in [-1, 1] \\ x^2, & x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \end{cases}$ . Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  știind că dreapta  $x = f(m)$  este axă de simetrie pentru graficul funcției.

Testul nr. 2

- 1. Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$ , cu proprietatea că  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (a+1)x + b - a^2$  intersectează axa  $Oy$  în  $A(0, 1)$ , iar graficul funcției conține punctul  $B(3, 7)$ .
- 2. Fie  $f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 7$ .
- a) Câte restricții ale lui  $f$  au numai imagini pozitive?  
 b) Câte restricții ale lui  $f$  au numai imagini pare?
- 3. Să se studieze monotonia funcției  $f: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{3x-9}{x+2}$ .

Testul nr. 3

- 1. Pentru ce valori  $a, b \in \mathbb{R}$  funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (a^2 - 2a)x + b$  admite centrul de simetrie  $A(1, 3b - b^2 - 2)$ ?
- 2. Să se determine funcțiile  $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 4\}$ , cu proprietatea că  $f(1) + f(2) + f(3) = 7$ .
- 3. Să se determine  $f \circ g$  și  $g \circ f$  știind că  $f(x) + 2f(3-x) = x$  și  $g(x) + 3g(2-x) = x + 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
- 4. Să se determine perioadele funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2x}{5} \right\rfloor$ .

Testul 4

- 1. Se consideră  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} ax, & x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$ .
- a) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  pentru care  $\text{Im } f = [-3, +\infty)$ .  
 b) Pentru ce valori ale lui  $a$  funcția  $f$  este crescătoare pe intervalul  $[-1, 2]$ ?  
 c) Să se arate că funcția  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(2x-1) - f(x)$ , este monotonă pentru oricare  $a \in \mathbb{R}$ .
- 2. Să se determine  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  cu proprietatea că  $f(0) = 1$  și  $f(n+1) = f(n) + (-1)^{f(n)}$ ,  $n \geq 1$ .
- 3. Să se determine funcțiile strict crescătoare  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , cu proprietatea că  $(f \circ f)(n) \leq n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- 4. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , o funcție cu proprietatea că  $f(2x-1) + f(2) + f(1) = 3x + 6$ .
- a) Să se determine aria triunghiului format de origine și punctele de intersecție ale graficului lui  $f$  cu axele de coordonate.  
 b) Să se determine valorile lui  $n \in \mathbb{N}^*$  pentru care numărul:  
 $S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$  este număr natural.

## III. FUNCȚIA DE GRADUL I

### 1 DEFINIȚIA FUNCȚIEI DE GRADUL I REPREZENTARE GRAFICĂ

□1. Să se determine intersecțiile cu axele de coordonate ale graficului funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , în cazurile:

a)  $f(x) = 3x - 6$ ;      b)  $f(x) = 2x + 8$ ;      c)  $f(x) = -x + 3$ ;  
 d)  $f(x) = -\frac{2}{3}x + 2$ ;      e)  $f(x) = x\sqrt{2} + 2$ ;      f)  $f(x) = (1 - \sqrt{2})x + \sqrt{2} + 1$ .

□2. Graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  intersectează axele de coordonate în punctele A și B. Să se determine lungimea segmentului  $[AB]$ , dacă:

a)  $f(x) = x - 1$ ; b)  $f(x) = 2x - 1$ ; c)  $f(x) = 3 - 4x$ ; d)  $f(x) = -\frac{4}{3}x + 4$ ;  
 e)  $f(x) = x\sqrt{3} + \sqrt{2}$ ; f)  $f(x) = 2x + \sqrt{3}$ .

□3. Să se determine funcțiile afine  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax + b$ , în situațiile:

a)  $f(3) = 6$ ,  $f(-6) = 3$ ; b)  $f(\sqrt{2}) = \sqrt{6} - \sqrt{5}$ ,  $f(-2\sqrt{3}) = -6 - \sqrt{5}$ ;  
 c)  $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 5$ ,  $f(0,25) = 2$ ; d)  $f(a) = a + 3$ ,  $f(b) = b + 3$ .

□4. Să se determine funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de gradul I care verifică relațiile:

a)  $f(2x - 3) + 2f(x + 1) = 3x - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;  
 b)  $(f \circ f)(x) + 2f(x) = 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;  
 c)  $(f \circ f)(x) + 2(f \circ f)(x + 1) = 3x + 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;  
 d)  $f(1 - 2x) \cdot f(1 + 2x) = 4 - 16x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

□5. Să se reprezinte grafic funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

a)  $f(x) = 3x - 6$ ;      b)  $f(x) = -2x + 4$ ;      c)  $f(x) = 1, (6)x + 1, (3)$ ;  
 d)  $f(x) = \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2}$ ;      e)  $f(x) = 3x + \sqrt{3}$ ;      f)  $f(x) = (\sqrt{6} - \sqrt{2})x + 1$ .

□6. Să se reprezinte graficul funcțiilor:

a)  $f: [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x - 1$ ;  
 b)  $f: (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + 3$ ;

c)  $f: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x + 2$ ;  
 d)  $f: (-\infty, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -2x + 4$ ;  
 e)  $f: (-1, 0] \cup [1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -x + 2$ ;  
 f)  $f: \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 2\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 4x - 1$ .

□7. Să se reprezinte graficul funcțiilor:

a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ 3x, & x > 0 \end{cases}$ ;  
 b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} -x + 1, & x \leq 1 \\ x - 2, & x > 1 \end{cases}$ ;  
 c)  $f: (-\infty, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq -1 \\ -x + 1, & x > -1 \end{cases}$ ;  
 d)  $f: \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq -1 \\ -x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$ .

□8. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (m + 1)x + 2$ . Să se determine  $m \in \mathbb{R}$ , astfel încât:

a) punctele de intersecție ale graficului funcției cu axele de coordonate să determine un segment cu lungimea  $\ell = 2\sqrt{2}$ .  
 b) aria triunghiului format de origine și intersecțiile graficului cu axele de coordonate să fie egală cu 2.

□9. Să se determine  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , funcție afină cu proprietatea că  $(f \circ f)(x) = x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Să se arate că graficele oricăror două funcții cu această proprietate sunt fie două drepte paralele, fie două drepte perpendiculare.

□10. Să se reprezinte graficul funcțiilor  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dacă:

a)  $f(x) = |x|$ ; b)  $f(x) = \text{sign}(x)$ ; c)  $f(x) = x + \text{sign}(x)$ ;  
 d)  $f(x) = x \cdot (-1)^{|x|}$ ; e)  $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \leq 1 \\ x - 1, & x > 1 \end{cases}$ .

□11. Să se stabilească valorile lui  $a \in \mathbb{R}$  pentru care punctele  $A(a^2, a + 1)$ ,  $B(2, 3)$ ,  $C(a + 3, 2a + 3)$  sunt puncte coliniare.

□12. Să se reprezinte grafic funcțiile:

a)  $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \left[x + \frac{3}{2}\right]$ ;      b)  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = [x^2]$ ;  
 c)  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + [x^2]$ .

□ 13. Se consideră  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (m^2 - 3m + 2)x + m^2 + 4m - 5$ .

- a) Pentru ce valori ale lui  $m \in \mathbb{R}$ , graficul funcției este paralel cu axa  $Ox$ ?  
 b) Dacă  $A$  este punctul de intersecție al graficului cu axa  $Oy$ , să se afle  $m \in \mathbb{R}$  pentru care  $|\overline{OA}|$  are modulul  $|\overline{OA}| = 8$ .  
 c) Dacă  $A, B$  sunt intersecțiile cu axele de coordonate, să se afle  $m \in \mathbb{R}$  pentru care  $\overline{AB}$  este perpendicular pe prima bisectoare.

□ 14. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x < a \\ 4x - 7, & x \geq a \end{cases}$ , afină pe intervale.

Să se determine valorile lui  $a \in \mathbb{R}$  pentru care are loc egalitatea  $f(a^2 + 1) = f(a + 3) + 2f(a - 2) - 1$ . Pentru valorile lui  $a$  găsite să se traseze graficul lui  $f$ .

□ 15. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x + 3, & x < a \\ 1 - x, & a \leq x < a + 2 \\ 2x - 1, & x \geq a + 2 \end{cases}$ .

- a) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$ , știind că  $A(a + 1, a + 10) \in \mathcal{G}_f$  și să se reprezinte funcția găsită.  
 b) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât graficul lui  $f$  să conțină punctul  $A(2, a + 1)$ .  
 c) Există valori ale lui  $a$  pentru care punctul  $A(3a - 1, 5) \in \mathcal{G}_f$ ?

□ 16. Se consideră funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (2a + 3b)x + a + b$ ,  $g(x) = (a + 3b)x - a - 3$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- a) Să se determine funcțiile  $f$  și  $g$  și să se reprezinte grafic știind că  $G_f \cap G_g = \{M(-1, 1)\}$ .  
 b) Să se determine lungimea segmentelor situate pe axele de coordonate și care au extremitățile în punctele de intersecție ale graficelor funcțiilor cu aceste axe.

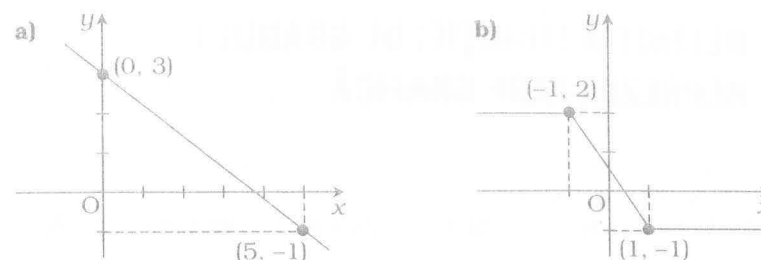
□ 17. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (m + 3)x + m^2 - 4$ ,  $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ .

- a) Să se determine  $f$  știind că graficul său conține punctul  $M(m, -5)$ .  
 b) Pentru  $m = -1$  să se calculeze media aritmetică, media geometrică și media armonică a numerelor  $a = |f(-\sqrt{2})|$  și  $b = |f(\sqrt{2})|$ .

□ 18. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (m + 2)x + 5m - 2$ .

- a) Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  astfel încât punctul cu ordonata  $m^2 + 4$  să aparțină graficului funcției și axei  $Oy$ .  
 b) Pentru  $m = -1$  să se verifice dacă punctele  $A(2; -4)$ ,  $B(4; 3)$ ,  $C(-2; 6)$  sunt pe graficul funcției.

□ 19. Să se determine legea de corespondență a funcției  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  cu reprezentarea geometrică dată în desenul următor.



Să se determine punctele de intersecție ale graficului funcției  $f$  cu axele de coordonate.

□ 20. Să se traseze graficul funcției  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $f(x) = mx + n$ , știind că  $f(-1) = -4$  și  $(f \circ f)(-1) = -5$ .

□ 21. Să se reprezinte graficul funcției  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  știind că  $f(x) = 3 - x$ , dacă  $x \geq 0$  și  $f(x) = f(-x)$ ,  $x \in \mathbb{D}$ .

□ 22. Să se reprezinte grafic funcția  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  știind că  $f(x) = 3$  pentru  $x \in [0, 1]$ ,  $f(x) = x + 2$  pentru  $x > 1$  și  $f$  este funcție pară.

□ 23. Să se reprezinte grafic funcția  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  cu proprietatea că este funcție impară,  $f(x) = -2$  pentru  $x \in [0, 1]$  și  $f(x) = x - 2$  pentru  $x \in (1, +\infty)$ .

□ 24. În plan se consideră punctele  $A(0, 4)$ ,  $B(0, 2)$ ,  $M(0, x)$  și se definește funcția  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $f(x) = 3MA - 2MB$ .

- a) Să se explicitizeze legea de corespondență a lui  $f$ .  
 b) Să se reprezinte grafic funcția  $f$ .

□ 25. Se consideră funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax + b$ ,  $g(x) = 2ax + 4$ .

Dacă  $A = \{M(-1, 2), N(1, -1)\}$  și  $\mathcal{G}_f, \mathcal{G}_g$  sunt reprezentările geometrice ale funcțiilor  $f$  și  $g$ , să se determine  $a$  și  $b$  pentru care  $A \cap \mathcal{G}_f \cap \mathcal{G}_g \neq \emptyset$ .

□ 26. Se consideră funcția  $f: \mathbb{D} \setminus \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $f(x) = ax + b$ ,  $a \neq 0$ . Să se arate că funcția  $f$  are cel puțin o valoare irațională.

## 2 MONOTONIA FUNCȚIEI DE GRADUL I

□1. Să se alcătuiască tabelul de variație pentru  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ , în situațiile:

- a)  $f(x) = 2x - 1$ ;      b)  $f(x) = 3x - 6$ ;      c)  $f(x) = -2x + 3$ ;  
 d)  $f(x) = -4x + 2$ ;      e)  $f(x) = (a^2 + 1)x + 2$ ;      f)  $f(x) = (a^2 - a + 1)x - 1$ .

□2. Să se studieze monotonia funcțiilor  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  în raport cu parametrul real  $m$ :

- a)  $f(x) = (m - 1)x + 2$ ;  
 b)  $f(x) = (2 - m)x - 3$ ;  
 c)  $f(x) = (4 + m)x + m$ .

□3. Să se studieze monotonia funcției  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  știind că graficul lui  $f$  conține punctul dat:

- a)  $f(x) = mx + 3$ ,  $A(2, 7)$ ;  
 b)  $f(x) = (m^2 - 1)x - 4m$ ,  $A(2, 14)$ ;  
 c)  $f(x) = (m - 1)x + m^2 + 3m$ ,  $A(-1, 9)$ ;  
 d)  $f(x) = (2m + 1)x + 3m^2 - m$ ,  $A(-m, 3)$ .

□4. Funcția  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $f(x) = mx + 6m - 1$  este funcție strict descrescătoare. Să se determine  $m \in \mathbb{D}$  astfel încât punctul  $A(4m - 5, m)$  să fie situat pe graficul lui  $f$ .

□5. Funcția  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $f(x) = (m + 1)x - 9$  este funcție strict crescătoare. Pentru ce valori ale lui  $m \in \mathbb{D}$  punctul  $A(m - 2, m - 3)$  este situat pe graficul funcției?

□6. Să se studieze monotonia funcției  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  în situațiile:

- a)  $f(x) = \frac{4m^2 + 4m + 2}{-m^2 - 1}x + 2$ ,  $m \in \mathbb{R}$ ;  
 b)  $f(x) = \frac{x}{3 - m} + 7$ ,  $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ ;  
 c)  $f(x) = (-2ab + a^2 + b^2)x + ab$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ;  
 d)  $f(x) = \left(\frac{a + b}{2} - \sqrt{ab}\right)x + 2$ ,  $a, b \in (0, +\infty)$ ;  
 e)  $f(x) = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\right)x + a + b$ ,  $a, b \in (0, +\infty)$ .

□7. Fie  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $f(x) = \begin{cases} (2 - a)x - 5, & x \leq 2 \\ -7x + a, & x > 2 \end{cases}$ .

a) Să se studieze monotonia funcției  $f$  știind că punctul  $A(-3, 4)$  aparține graficului acesteia.

b) Să se determine  $a \in \mathbb{D}$  știind că  $f$  este strict descrescătoare pe  $\mathbb{D}$ .

□8. Se consideră funcția  $f_a: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $f_a(x) = \begin{cases} 3x + 2 + a, & x \leq -1 \\ 4x + 3a, & x > -1 \end{cases}$ .

a) Să se determine valorile lui  $a \in \mathbb{D}$ , astfel încât  $f_a$  să fie monotonă pe  $\mathbb{D}$ .

b) Să se reprezinte graficul funcțiilor  $f_2$  și  $f_2$  și să se determine intervalele de monotonie ale acestora.

□9. Fie  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $f(x) = ax + b$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Să se reprezinte grafic funcțiile  $f$  descrescătoare știind că punctul  $A(2a + b, 2b - 8)$  aparține graficului funcției.

□10. Se consideră funcțiile  $f_a: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $f_a(x) = \begin{cases} (5 - a)x - 1, & x < 0,5 \\ (5a - 3)x + 2x - 7, & x \geq 0,5 \end{cases}$ .

a) Să se determine  $a \in \mathbb{Z}$  astfel încât funcția  $f_a$  să fie monoton crescătoare.

b) Să se determine punctele comune graficelor funcției  $f_2$  și funcției:

$$g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}, g(x) = 5x - 1.$$

□11. Se consideră  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{2m}{5} - 1\right)x - 2m, & x \leq -1 \\ (3 - m)x - \frac{5}{2}m + 1, & x > -1 \end{cases}$ .

a) Să se determine  $m \in \mathbb{D}$  astfel încât  $f$  să fie crescătoare.

b) Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  cu proprietatea că  $f(-1)$  este cea mai mare valoare a funcției.

□12. Se consideră funcțiile  $f, g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $f(x) = -3x + 1$ ,  $g(x) = 2x - 5$ .

Să se studieze monotonia funcțiilor  $f \circ f$ ,  $f \circ g$ ,  $g \circ f$ ,  $g \circ g$ .

□13. Se consideră funcția  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $f(x) = \begin{cases} ax, & x \in \mathbb{Q} \\ -ax, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ ,  $a \in \mathbb{Q}$ .

Să se studieze monotonia funcției  $f \circ f$ .

□14. Se da funcția  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x - m, & x \leq -m \\ mx - 1, & x > -m \end{cases}$ . Să se studieze monotonia

funcției  $g = f \circ f \circ f$  în funcție de valorile lui  $m$  pentru care  $f$  este crescătoare pe intervalul  $(-m - 1, -m + 1)$ .

### 3 SEMNUL FUNCȚIEI DE GRADUL I INECUAȚII DE GRADUL I

□1. Să se alcătuiască tabelul de semn pentru funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  în cazurile:

a)  $f(x) = x - 1$ ; b)  $f(x) = 2x - 4$ ; c)  $f(x) = -3x + 2$ ;

d)  $f(x) = -4x + 12$ ; e)  $f(x) = \frac{3}{2}x + 4$ ; f)  $f(x) = -\frac{2}{3}x + \sqrt{2}$ ;

g)  $f(x) = (a^2 + 1)x - a$ ; h)  $f(x) = (a - 1 - a^2)x - a^2$ .

□2. Să se stabilească semnul funcțiilor:

a)  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ ; b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x - 1)x$ ;

c)  $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x-1}$ ; d)  $f: \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$ ;

e)  $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{x-1}$ ;

f)  $f: \mathbb{R} \setminus \{2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x(x-1)}{(x-2)(x-3)}$ .

□3. Să se traseze graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și să se determine semnul și intervalele de monotonie ale acesteia, în cazurile:

a)  $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 2 \\ 2x - 6, & x > 2 \end{cases}$ ; b)  $f(x) = \begin{cases} -x + 3, & x \leq 5 \\ x - 7, & x > 5 \end{cases}$ ;

c)  $f(x) = \begin{cases} -3x + 4, & x \leq 2 \\ -3x + 9, & x \in (2, 4) \\ x - 5, & x \geq 4 \end{cases}$ ; d)  $f(x) = \begin{cases} \text{sign}(x), & x \leq 2 \\ \text{sign}(x - 3), & x > 2 \end{cases}$ .

□4. Să se explicitizeze funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  în cazurile:

a)  $f(x) = x \cdot \text{sign}(x - 2)$ ;

b)  $f(x) = \text{sign}(x(x - 2))$ ;

c)  $f(x) = \text{sign}(x - 1) + 2x \cdot \text{sign}(1 - x)$ ;

d)  $f(x) = x \cdot \text{sign}(x - 2) + (x - 2) \cdot \text{sign}(x)$ .

□5. Să se explicitizeze legea de corespondență a funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , în cazurile:

a)  $f(x) = x + |x - 1|$ ;

b)  $f(x) = |x - 2| + 2|x|$ ;

c)  $f(x) = x \cdot |x - 3|$ ;

d)  $f(x) = 2|x - 1| + 3|x + 1|$ ;

e)  $f(x) = |x - 2| \cdot |x + 1|$ ;

f)  $f(x) = |x - \text{sign}(x)|$ .

□6. Să se determine valorile parametrului real  $m$  pentru care funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este pozitivă numai pe intervalul specificat:

a)  $f(x) = x - m, I = [-1, +\infty)$ ;

b)  $f(x) = -2x + 4m, I = (-\infty, 3]$ ;

c)  $f(x) = mx - 2, I = [1, +\infty)$ ;

d)  $f(x) = (m - 2)x + m^2 - 10, I = [1, +\infty)$ .

□7. Să se studieze semnul funcțiilor  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

a)  $f(x) = (m - 1)x + m$ ; b)  $f(x) = (2 - m)x - 3$ ;

c)  $f(x) = (m^2 - m)x + 3$ ; d)  $f(x) = (m^2 - 1)x - m$ .

□8. Să se rezolve inecuațiile:

a)  $5x - 7 \geq -4x + 1$ ;

b)  $3x - 6 \leq 41x + 13$ ;

c)  $5(x - 2) + 4 \leq 3(3x + 2) - 4$ ;

d)  $\frac{29 - 2x}{3} + 7 < \frac{3x - 11}{4} - x$ ;

e)  $\frac{12x + 7}{3} > 3x + \frac{1 - x}{4}$ ;

f)  $(x - 5)(2x - 5) - (2x - 7)^2 \leq -2(x^2 - 1)$ ;

g)  $\frac{3 - 2x}{2} + \frac{3x - 3}{4} < \frac{4x - 5}{10} - 0,65(x - 1)$ ;

h)  $\frac{(x - 5)^2}{2} - \frac{(x - 6)^2}{4} + \frac{1}{2} \geq 0$ .

□9. Să se rezolve inecuațiile:

a)  $\frac{x}{x - 1} \geq 0$ ; b)  $\frac{x - 1}{2x - 3} < 0$ ; c)  $\frac{x(x - 1)}{x - 3} \geq 0$ ; d)  $\frac{x^2 - 6x}{x^2 - 1} \leq 0$ ;

e)  $\frac{5x}{x - 2} \leq 1$ ; f)  $\frac{6x - 3}{x + 1} + 1 \leq 0$ ; g)  $\frac{5x}{x - 2} + 1 < \frac{4}{3} - \frac{1}{x - 2}$ ; h)  $\frac{x}{x - 1} + \frac{x}{x + 1} \geq 0$ .

□10. Să se determine valorile parametrului  $m \in \mathbb{R}$  pentru care funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sunt strict crescătoare pe  $\mathbb{R}$ :

a)  $f(x) = \frac{m}{m + 3}x - 2$ ; b)  $f(x) = \frac{2m - 3}{3m + 2}x - m$ ;

c)  $f(x) = \frac{m^2 - m}{m + 1}x - m$ ; d)  $f(x) = \frac{m^2 + 2m}{m^2 - 1}x + 3$ .

□11. Să se reprezinte grafic funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și să se stabilească semnul acestora:

- a)  $f(x) = \max(2x - 1; 5)$ ;                      b)  $f(x) = \max(3 - x, 6)$ ;  
 c)  $f(x) = \max(2x - 3, 4x - 5)$ ;            d)  $f(x) = \min(x - 1, 5x + 3)$ ;  
 e)  $f(x) = \max(|x|, x - 2)$ ;                  f)  $f(x) = \max(|x - 1|, 2)$ .

□12. Să se rezolve inecuațiile:

- a)  $|x - 9| \geq 3$ ;                                      b)  $|2x - 4| \leq 5$ ;  
 c)  $|x - 1| + 3|x| \leq 7$ ;                          d)  $|2x - 1| + |x - 2| \leq 2$ ;  
 e)  $|2x - 3| \leq x + 2$ ;                            f)  $|3x - 4| + x \leq 2|x|$ .

□13. Să se rezolve și să se discute inecuațiile în funcție de parametrul real  $m$ :

- a)  $mx - 5 \leq x - 1$ ;                              b)  $mx + 3 \leq 3x + m$ ;  
 c)  $\sqrt{3x} - m > mx - \sqrt{3}$ ;                      d)  $m\sqrt{2x} - 4m < -\sqrt{2}m$ ;  
 e)  $m^2x + 3 \leq mx + m$ ;                      f)  $\frac{m-3}{2m}x + \frac{x-1}{m} \geq \frac{1-x}{2}$ .

□14. Se consideră funcțiile:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 2 \\ 3x, & x > 2 \end{cases}, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{x-1}{x}$$

- a) Să se determine  $f \circ g$ .  
 b) Să se stabilească semnul funcției  $f \circ g$ .

□15. Să se determine valorile parametrului real  $m$  pentru care funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

- a)  $f(x) = (m + 3)x + 2$  este negativă pe intervalul  $(1, +\infty)$ ;  
 b)  $f(x) = (3 - m)x - m$  este negativă pe intervalul  $(-\infty, -2)$ ;  
 c)  $f(x) = (m + 1)x + m + 8$  este pozitivă pe intervalul  $[-2, 5]$ .

## 4 POZIȚII RELATIVE A DOUĂ DREPTE SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

□1. Să se determine poziția dreptelor AB și CD în cazurile:

- a) A(2, 2), B(3, 2), C(4, 3), D(-3, 3);  
 b) A(2, 2), B(3, 3), C(3, 2), D(4, 3);  
 c) A(-1, 0), B(1, 0), C(3, 0), D(4, 1);  
 d) A(-2, 2), B(2, -2), C(1, 1), D(4, 4).

□2. Să se rezolve și să se interpreteze geometric sistemele de ecuații:

- a)  $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}$ ;                      b)  $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x + 4y = 5 \end{cases}$ ;                      c)  $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ ;  
 d)  $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 6x - 10y = 3 \end{cases}$ ;                      e)  $\begin{cases} 1,8x + 4,5y = 2,8 \\ 2,2x - 3,1y = -0,4 \end{cases}$ ;                      f)  $\begin{cases} y + 1 = 2x + 9 \\ 11x + 10y = 18 \end{cases}$ .

□3. Să se rezolve sistemele de ecuații:

- a)  $\begin{cases} 2x + 3(y - 1) = x + 2y \\ 5(x - y) + 1 = 2x - 3y \end{cases}$ ;                      b)  $\begin{cases} 5(x + y) + 3(2x - y) = 9 \\ 15(x - 2y) + 6(3y + 4x) = 1 \end{cases}$ ;  
 c)  $\begin{cases} 0,0(6)x - 0,08(3)y = 0,5(3) \\ x - y = -1 \end{cases}$ ;                      d)  $\begin{cases} 3(0,1x + 7) - 8 = 14,5y \\ \frac{9 + 1,2y - x}{3} + 2\left(\frac{1}{3} - 3\right) = -3\frac{3}{5} \end{cases}$ ;  
 e)  $\begin{cases} \sqrt{6x} - \sqrt{8y} = 2\sqrt{3} \\ \sqrt{24x} - \sqrt{28y} = 4\sqrt{3} \end{cases}$ ;                      f)  $\begin{cases} x + y = \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \\ \frac{x}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = 2 \end{cases}$ .

□4. Să se rezolve sistemele:

- a)  $\begin{cases} \frac{5}{x+3} - \frac{3}{y-4} = \frac{4}{7} \\ \frac{20}{x+3} - \frac{21}{y-4} = 1 \end{cases}$ ;                      b)  $\begin{cases} \frac{2x-3y+1}{x-2y+3} = 1 \\ \frac{x+5y+3}{-4x+y-7} = -2 \end{cases}$ ;                      c)  $\begin{cases} \frac{2}{2x+y} - \frac{5}{x-y} = \frac{23}{20} \\ \frac{7}{x-y} + \frac{3}{2x+y} = \frac{19}{10} \end{cases}$ ;  
 d)  $\begin{cases} 4|x| + 3|y| = 11 \\ |3x - y| = 18 \end{cases}$ ;                      e)  $\begin{cases} 2|x-1| + 3|y| = 5 \\ 3|x-1| + 5|y| = 8 \end{cases}$ .

□5. Fie sistemul de ecuații  $\begin{cases} (2m-1)x + y = -m-2 \\ (3-m)x - 4y = 3m+7 \end{cases}$ .

- a) Există valori ale lui  $m \in \mathbb{R}$  pentru care sistemul are soluție unică?  
 b) Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  pentru care sistemul are cel puțin două soluții.

□6. Fie sistemul:  $\begin{cases} (a-1)x + 8y = 4 \\ 3x + (a+1)y = 3 \end{cases}$ ,  $a \in \{-5, -1, 2, 5\}$ . Să se determine probabilitatea ca luând la întâmplare o valoare a lui „a” din mulțimea dată, sistemul să fie:

a) compatibil determinat; b) incompatibil; c) compatibil nedeterminat.

□7. Se consideră sistemul  $\begin{cases} 7x - 5y = 0 \\ (m-1)x + (m+2)y = 0 \end{cases}$ ,  $m \in \mathbb{R}$ .

a) Să se arate că pentru orice  $m \in \mathbb{R}$  sistemul este compatibil.  
b) Pentru ce valori ale lui  $m \in \mathbb{R}$  sistemul are cel puțin două soluții?

## 5 SISTEME DE INECUAȚII DE GRADUL I

□1. Să se rezolve sistemele de inecuații:

a)  $\begin{cases} 3x - 5 \leq 0 \\ 4x + 7 \geq 0 \end{cases}$ ; b)  $\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{4}{7} \geq 0 \\ x - 4 \leq 0 \end{cases}$ ; c)  $\begin{cases} \frac{x+1}{3} - \frac{x+2}{4} > 0 \\ (x-2)(x+2) \leq (x+1)^2 \end{cases}$ ;

d)  $\begin{cases} \sqrt{27x} - \sqrt{8} \leq \sqrt{18x} - \sqrt{12} \\ \frac{1}{4}(6x+7) - \frac{3}{4}(3x+1) > 1 \end{cases}$ ; e)  $\begin{cases} (x-1)^2 + 3(x+1)^2 \leq 4x^2 \\ (x+1)^2 + 2(x-2)^2 \geq 3x^2 \end{cases}$ .

□2. Să se rezolve inecuațiile folosind proprietățile modulului:

a)  $|x+3| \leq 2$ ; b)  $|3-4x| \leq x+1$ ; c)  $|3x-1| \leq 2x+1$ .

□3. Să se rezolve inecuațiile:

a)  $-1 < \frac{2x-5}{x-4} < 3$ ; b)  $-2 \leq \frac{x-1}{x-3} - \frac{x-5}{9-3x} < 1$ ; c)  $1 \geq \frac{x^2-1}{x^2-4} \geq 0$ .

□4. Să se rezolve sistemele de inecuații:

a)  $\begin{cases} \frac{3x}{x-1} - 1 > 3 \\ \frac{x-2}{x+1} < 0 \end{cases}$ ; b)  $\begin{cases} \frac{x+1}{3} + \frac{1}{2} > x + \frac{2}{3} \\ \frac{x+2}{x+1} > \frac{x}{2(x+1)} \end{cases}$ ; c)  $\begin{cases} \frac{x-3}{4} < \frac{x+1}{2} \\ \frac{x-1}{x-3} > \frac{x+1}{x-1} \end{cases}$ ;

d)  $\begin{cases} \frac{(x+4)(x+1)}{2x+3} > 0 \\ \frac{(-x-3)(x+5)}{x+3} < 0 \end{cases}$ ; e)  $\begin{cases} 0 \leq \frac{3x-4}{2x+3} < 1 \\ 1 < \frac{3x-4}{2x-1} < 2 \end{cases}$ ; f)  $\begin{cases} \frac{x^2-4}{x^2-9} < 0 \\ \frac{2x-1}{2x+1} < \frac{3x-1}{3x+1} \end{cases}$ .

□5. Să se rezolve sistemele de inecuații:

a)  $\begin{cases} |2x| \geq 1 \\ |2x-1| < 3 \end{cases}$ ; b)  $\begin{cases} |x+5| < 8 \\ |x+1| < 5 \end{cases}$ ; c)  $\begin{cases} \frac{2x-5}{x+1} < 1 \\ |4x-3| < 5 \end{cases}$ ; d)  $\begin{cases} |1-x| > \frac{x-3}{x} \\ \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+x} \leq \frac{|x+3|}{x^2-1} \end{cases}$ .

□6. Să se rezolve ecuațiile:

a)  $\max\left(\frac{2x-1}{3}, \frac{6x+1}{5}\right) = \frac{2x+1}{5}$ ; b)  $\max\left(\frac{x-1}{x-2}, \frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{x+2}{4}$ ;  
c)  $\max\left(1, x+2, \frac{3-x}{2}\right) = \frac{x-3}{6}$ ; d)  $\max\left(x+1, \frac{x-1}{2}, \frac{2x+1}{3}\right) = \frac{2x+3}{3}$ .

□7. Să se reprezinte grafic funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dacă:

a)  $f(x) = \min(x+2, -x, 3-4x)$ ; b)  $f(x) = \max(x-1, 1, 3-2x)$ .

□8. Să se determine  $x \in \mathbb{R}$  în cazurile:

a)  $\frac{2x-1}{3} \in \left(\frac{x-1}{2}, \frac{2x+1}{5}\right)$ ; b)  $3x+1 \in [2x, x^2+1]$ ; c)  $\frac{x-1}{x-2} \in \left(\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right)$ .

□9. Să se determine în funcție de  $x \in \mathbb{R}$  intersecția intervalelor:

a)  $I = \left[\frac{x-1}{2}, +\infty\right)$ ,  $J = \left(-\infty, \frac{2x+3}{5}\right]$ ;  
b)  $I = \left[\frac{x-1}{2}, \frac{3x-2}{5}\right]$ ,  $J = \left[\frac{2x-1}{3}, \frac{3x-2}{4}\right]$ .

□10. Se consideră funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (m-3)x + 2m - 1$ ,  $g(x) = (1-m)x + 3m - 8$ . Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  știind că funcțiile sunt simultan pozitive pe mulțimea  $[-3, 1]$ .

□11. Fie funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (m+3)x - 2m + 9$ ,  $g(x) = (m-2)x + m - 5$ .

Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  în cazurile:

a) f și g sunt negative pe intervalul  $[-4, -1]$ ;  
b) f și g au semne contrare pe intervalul  $[-1, 2]$ .

□12. Se consideră funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (3m-2)x + m - 1$ ,  $g(x) = (m-2)x + 2m - 3$ .

Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  astfel încât pe intervalul  $[0, +\infty)$  funcțiile f și g au semne contrare.



□7. Să se determine  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$  știind că vârful parabolei asociate este  $V(5, -23)$  și graficul funcției intersectează axa  $Oy$  în punctul cu ordonata 2.

□8. Să se determine funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , în cazurile:

a)  $f(0) = 1$ ,  $f(-1) = 5$ ,  $f(2) = 11$ ;

b)  $f(0) = 8 + f(2) = 5$ , iar minimumul funcției este  $-4$ ;

c) graficul funcției intersectează axa  $Ox$  în punctele cu abscisele  $\sqrt{2}$  și  $0$  și își atinge maximumul în  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

□9. Să se determine funcția de gradul al doilea al cărei grafic este tangent axei  $Ox$  în punctul de abscisă  $-5$  și trece prin punctul  $A(-3, 4)$ .

□10. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -\frac{x^2}{2} + (2a+1)x + 2a + b - \frac{3}{4}$ . Să se determine valorile

$a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât parabola asociată funcției  $f$  să aibă vârful  $V\left(-3, -\frac{1}{11}\right)$ .

□11. Fie  $A(-4, 0)$ ,  $B(0, 3)$  și  $M(x-1, 2x+1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Să se determine funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = MA^2 - 2MB^2$ .

Să se traseze graficul acesteia și să se afle valorile extreme ale ei.

□12. Se consideră funcția:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (ax-1)^2 + (ax-2)^2 + \dots + (ax-n)^2$ ,  $a \neq 0$ .

Să se arate că valoarea minimă a funcției  $f$  nu depinde de  $a \in \mathbb{R}$ .

□13. Să se determine axele de simetrie pentru graficele funcțiilor  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , date de:

a)  $f(x) = x^2 + 1$ ;

b)  $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ ;

c)  $f(x) = -3x^2 + 6x - 2$ ;

d)  $f(x) = x^2 + 6x - 11$ .

□14. Să se determine valorile parametrului real  $m$  pentru care dreapta dată este axă de simetrie a funcției de gradul al doilea în cazurile:

a)  $f(x) = x^2 - 2(m-2)x + 3$ ,  $x = 3$ ;    b)  $f(x) = mx^2 - (m-1)x$ ,  $x = -5$ ;

c)  $f(x) = 2x^2 - (m^2-3)x + 5$ ,  $x = 5,5$ ;    d)  $f(x) = \frac{m-1}{m}x^2 - \frac{3m}{m+2}x$ ,  $x = 2$ .

□15. Să se reprezinte grafic funcțiile de gradul al doilea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

a)  $f(x) = 3x^2$ ;

b)  $f(x) = 2x^2 - 2$ ;

c)  $f(x) = x^2 - 4x$ ;

d)  $f(x) = -x^2 + 1$ ;

e)  $f(x) = -2x^2 + 3x$ ;

f)  $f(x) = x^2 - 2x + 2$ ;

g)  $f(x) = x^2 - 4x + 4$ ;

h)  $f(x) = -x^2 - 6x - 9$ ;

i)  $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ ;

j)  $f(x) = -3x^2 - 4x + 4$ .

□16. Să se determine funcția de gradul al doilea care are un minim egal cu 6,2, graficul funcției conține punctul  $A(1, 7)$  și este simetric în raport cu dreapta  $x = 0,6$ .

□17. Să se determine și să se reprezinte grafic  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , știind că numerele  $a, b, c$  sunt în progresie aritmetică cu rația  $r = 2$ , iar axa de simetrie a graficului este dreapta  $x = -0,7$ .

□18. Să se determine funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , știind că numerele  $a, b, c$  sunt în progresie geometrică având suma  $S = -0,7$  și  $f(x) = f\left(\frac{1}{3} - x\right)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

□19. Să se reprezinte grafic funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , știind că îndeplinește una din condițiile:

a) intersectează axele de coordonate în punctele de abscisă  $x = -2$  și  $x = 3$ , iar valoarea extremă este egală cu  $\frac{1}{2}$ .

b) graficul său este tangent axei  $Ox$  în punctul de abscisă  $x = -4$  și conține punctul  $A(-2, -4)$ .

□20. Fie  $A(2x-1, 0)$ ,  $B(x, 0)$ ,  $C(0, x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  și funcția:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 + BC^2 + \frac{m}{4}\right)$ ,  $m \in \mathbb{R}$ .

Să se reprezinte grafic funcția  $f$  știind că graficul ei este tangent axei  $Ox$ .

□21. Se consideră punctele  $A(3, 5)$ ,  $B(1, 7)$ ,  $C(-1, -3)$ . Să se determine punctele  $M$  de pe axele de coordonate pentru care următoarele expresii au valoare minimă:

a)  $E = MA^2 + MB^2 + MC^2$ ;    b)  $E = AB^2 \cdot MC^2 + AC^2 \cdot MB^2 + BC^2 \cdot MA^2$ .

□22. Se consideră punctele  $A(3, 2)$ ,  $B(6, 5)$ . Să se determine punctele  $M$  de pe axele de coordonate pentru care:

a)  $MA^2 + MB^2$  este minimă;

b)  $OA^2 \cdot MB^2 + OB^2 \cdot MA^2$  este minimă;

c)  $2MA^2 - 3MB^2$  este maximă;

d)  $3MA^2 - 5MB^2 + AB^2$  este maximă.

□23. Să se reprezinte grafic funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , în cazurile:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \begin{cases} x^2, & x \leq 0; \\ x, & x > 0 \end{cases}; & \text{b) } f(x) &= \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 0; \\ 2x - 1, & x > 0 \end{cases}; \\ \text{c) } f(x) &= \begin{cases} x^2 - x, & x \leq 1; \\ -2x^2 + 2, & x > 1 \end{cases}; & \text{d) } f(x) &= \begin{cases} -x^2 + 3x, & x \leq 2; \\ 2x^2 - 3x, & x > 2 \end{cases}; \\ \text{e) } f(x) &= \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 1; \\ -x^2 + 4x - 3, & x \in (1, 3); \\ x^2 - 8x + 15, & x \geq 3 \end{cases}. \end{aligned}$$

□24. Să se reprezinte grafic funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , știind că punctul indicat aparține graficului funcției:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= \begin{cases} x^2 - x, & x \leq m \\ 7x - m, & x \in [m+1, m+3], A(2m, 24); \\ \frac{1}{4}x^2 + x, & x > m+3 \end{cases} \\ \text{b) } f(x) &= \begin{cases} x^2 - 6x + m, & x \leq m-1 \\ -x^2 + 2x + 72, & x > m-1 \end{cases}, A(3m+3, 69). \end{aligned}$$

□25. Să se reprezinte grafic funcțiile și să se afle  $\text{Im } f$ :

$$\begin{aligned} \text{a) } f: [-4, 2] &\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2; \\ \text{b) } f: \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right) &\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x^2 + 8; \\ \text{c) } f: (-\infty, 2] &\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 - 4x + 1; \\ \text{d) } f: (-3, 2) \cup [3, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 3x + 2; \\ \text{e) } f: (-\infty, -1) \cup [3, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4 - x^2; \\ \text{f) } f: [-1, 5] \cup [6, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 10x + 25. \end{aligned}$$

□26. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2$  și mulțimile  $A = [-2, -1], B = [0, 3]$ . Să se compare mulțimile:

$$\text{a) } f(A \cup B) \text{ și } f(A) \cup f(B); \quad \text{b) } f(A \cap B) \text{ și } f(A) \cap f(B).$$

□27. Să se demonstreze că pentru oricare  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , graficele funcțiilor  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a), g(x) = a(x-b)(x-c) + b(x-a)(x-c) + c(x-a)(x-b)$ , intersecțiază axa  $Ox$ .

□28. Să se demonstreze că vârfurile parabolilor asociate funcției  $f_m$  sunt situate pe o dreaptă în cazurile:

$$\begin{aligned} \text{a) } f_m(x) &= (m-1)x^2 + 2(m+1)x + m, m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}; \\ \text{b) } f_m(x) &= (m+2)x^2 + 4(m-1)x + 4m - 1, m \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}; \\ \text{c) } f_m(x) &= -x^2 + (2m+6)x - m^2 - 5m - 7. \end{aligned}$$

□29. Să se arate că vârfurile parabolilor asociate funcțiilor  $f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sunt situate pe o parabolă:

$$\begin{aligned} \text{a) } f_m(x) &= x^2 + (2m-2)x + 2 - m, m \in \mathbb{R}; \\ \text{b) } f_m(x) &= x^2 - 2(m+1)x + 2m, m \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□30. Să se arate că parabolile asociate funcțiilor  $f_m(x) = x^2 - 2(m+1)x + 2m, m \in \mathbb{R}$ , au un punct comun.

□31. Se consideră familia de parabolile  $f_m(x) = x^2 - 2(m-2)x + 4m - 3, m \in \mathbb{R}$ . Să se arate că vârfurile parabolilor se găsesc pe o parabolă. Să se reprezinte grafic această parabolă.

□32. Fie familia de funcții  $f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_m(x) = (m-1)x^2 + (3m-1)x + 2m + 1, m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

a) Să se arate că parabolile asociate acestor funcții trec prin două puncte fixe.

b) Să se determine  $m$  pentru care vârful parabolei este situat în cadranele 2 sau 3.

□33. Se consideră familia de funcții  $f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_m(x) = (2m+3)x^2 - (7m+2)x - 4m - 5, m \neq -\frac{3}{2}$ .

a) Să se arate că parabolile asociate funcțiilor trec prin două puncte fixe.

b) Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  pentru care parabolile intersecțiază axa  $Ox$  în puncte separate de axa  $Oy$ .

□34. Să se determine funcția de gradul al doilea care este nulă pentru  $x = 1, (6)$  și are un maxim egal cu  $16, (3)$  pentru  $x = 0, (6)$ .

□35. Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$ , astfel încât funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (a-1)x^2 + (b-2)x + a$  să aibă un minim realizat pentru  $x = 5$ , iar funcția  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2.5(a-x^2) + bx(x-b) + 3x - 5$  să aibă valoarea maximă realizată pentru  $x = 0, (6)$ .

## 2 RELAȚIILE LUI VIÈTE

□1. Să se rezolve ecuațiile știind că admit soluțiile specificate:

a)  $3x^2 + (m^2 - 3m)x - 4 = 0$ ,  $x_1 = -2$ ;

b)  $(m^2 + 6)x^2 - (3m - 1)x + m - 2 = 0$ ,  $x_1 = -1$ ;

c)  $(m^2 - 5)x^2 + (3m - 2)x + m^2 - 13 = 0$ ,  $x_1 = 2$ ;

d)  $(m + 2)x^2 + 3x - m^2 = 0$ ,  $x_1 = m$ .

□2. Să se scrie relațiile lui Viète pentru ecuațiile date și să se exprime expresiile  $E = x_1^2 + x_2^2$ ,  $F = x_1^3 + x_2^3$ :

a)  $x^2 - 7x + 7 = 0$ ; b)  $x^2 - 18x + 79 = 0$ ; c)  $5x^2 - 18x + 1 = 0$ .

□3. Să se calculeze valoarea expresiilor date, dacă  $x_1, x_2$  sunt soluții ale ecuației de gradul al doilea:

a)  $x^2 - 6x + 6 = 0$ ,  $E = \frac{x_1 x_2}{1 + x_1 x_2} + \frac{x_1 + x_2}{2}$ ;

b)  $x^2 + 6x - 1 = 0$ ,  $E = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1 + x_2}$ ;

c)  $3x^2 - 4x - 1 = 0$ ,  $E = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{1}{x_1 + x_2}$ ;

d)  $4x^2 + 3x - 8 = 0$ ,  $E = \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)^3$ .

□4. Să se calculeze valoarea expresiei  $E = \frac{x_1^2 + 3x_1 + 2}{x_1^2 + 5x_1 + 2} + \frac{x_2^2 + 3x_2 + 2}{x_2^2 + 5x_2 + 2}$ , unde  $x_1, x_2$  sunt soluțiile ecuației  $2x^2 - 7x + 2 = 0$ .

□5. Să se determine parametrul  $m \in \mathbb{R}$  cu proprietatea că între soluțiile  $x_1, x_2$  ale ecuației date are loc relația specificată:

a)  $x^2 - mx + m = 0$ ,  $x_1 = 2x_2$ ;

b)  $x^2 - (2m - 3)x + m - 1 = 0$ ,  $3x_1 - 5x_1 x_2 + 3x_2 = 0$ ;

c)  $x^2 - 2x + m^2 - 1 = 0$ ,  $x_1^3 + x_2^3 = -4$ ;

d)  $mx^2 - (m + 1)x + 1 = 0$ ,  $(x_1 + x_2)^2 + (x_1 x_2)^2 = \frac{5}{2}$ .

□6. Să se determine o relație independentă de  $m \in \mathbb{R}$  între soluțiile ecuațiilor date:

a)  $mx^2 - (m + 1)x + 3 = 0$ ; b)  $mx^2 + (2m - 4)x + 4m - 3 = 0$ ;

c)  $x^2 - 2(1 + m^2)x + m - 3 = 0$ ; d)  $mx^2 - (3m - 1)x + 6m\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 0$ ;

e)  $x^2 + (m - 3)x + 2 + 3m^2 = 0$ .

□7. Fie ecuația  $2x^2 - 2mx + 7 - 4m = 0$ . Să se arate că pentru  $m \in \mathbb{R}$  soluțiile ecuației verifică egalitatea:  $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = 1 + m^2$ .

□8. Să se determine relația între coeficienții  $a, b, c \in \mathbb{R}$  știind că soluțiile reale  $x_1, x_2$  ale ecuației  $ax^2 + bx + c = 0$  verifică relația  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + 2 = 0$ .

□9. a) Fie ecuația  $x^2 + ax + b = 0$ . Să se afle  $a, b \in \mathbb{R}$  știind că  $x_1^2 + x_2^2 = 2$  și  $x_1^3 + x_2^3 = 20$ .

b) Fie  $x_1, x_2$  soluțiile ecuației  $x^2 + ax + 1 = 0$  și  $y_1, y_2$  soluțiile ecuației  $y^2 + by + 1 = 0$ . Să se calculeze  $(x_1 - y_1)(x_2 - y_1)(x_1 + y_2)(x_2 + y_2)$ .

□10. Să se formeze ecuația de gradul al doilea care are soluțiile:

a)  $x_1 = 1, x_2 = 2$ ;

b)  $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}$ ;

c)  $x_1 = 1 + \sqrt{2}, x_2 = 1 - \sqrt{2}$ ;

d)  $x_1 = 3 - 2\sqrt{2}, x_2 = 3 + 2\sqrt{2}$ .

□11. Fie  $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ . Să se arate că dacă ecuațiile  $x^2 + ax + bc = 0$  și  $x^2 + bx + ac = 0$  au o singură soluție comună, atunci celelalte două soluții verifică ecuația  $x^2 + cx + ab = 0$ .

□12. Să se discute natura și semnul inecuației după semnul lui  $m \in \mathbb{R}$ :

a)  $x^2 - 2x + m - 2 = 0$ ;

b)  $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 = 0$ ;

c)  $(m^2 - 1)x^2 + 2(m + 2)x + 1 = 0$ ;

d)  $(m + 2)x^2 + 2(m + 1)x + m + 3 = 0$ ;

e)  $2x^2 + 3|m|x + m^2 = 0$ ;

f)  $x^2 + 2(|m| - 1)x + m^2 - 4 = 0$ .

□13. Să se discute natura și semnul soluțiilor ecuației în funcție de  $m \in \mathbb{R}$ :

a)  $\frac{1}{x - m} + \frac{2}{x + m} = \frac{1}{m}$ ;

b)  $\frac{1}{x + m} + \frac{3}{2x + m} = \frac{1}{x + 1}$ ;

c)  $m(x - 1)(x - 2) + (x - 2)(x - m) + 2(x - 1)(x - m) = 0$ .

□14. Se consideră funcția de gradul al doilea:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = mx^2 - 2(m - 1)x + m - 3$ .

Să se determine parametrul real  $m$  astfel încât:

a) graficul funcției intersectează axa  $Ox$  în două puncte separate de axa  $Oy$ .

b) graficul funcției intersectează axa  $Ox$  în două puncte cu abscise pozitive.

□15. Se consideră funcția de gradul al doilea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -x^2 + (2m+3)x - m^2 - 4$ .

a) Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  astfel încât intersecția  $G_f \cap O_x$  să fie formată din două puncte cu abscisele negative.

b) Există valori ale lui  $m$  astfel încât graficul funcției să intersecteze axa  $O_x$  în două puncte separate de axa  $O_y$ ?

□16. Fie funcția de gradul al doilea  $ax^2 + bx + c = 0$  și  $x_1, x_2$  soluțiile sale. Să se determine  $a, b, c$  pentru care numerele  $a, x_1, b, x_2, c$  sunt în progresie aritmetică.

□17. Fără a rezolva ecuațiile să se precizeze semnul soluțiilor reale ale acestora:

a)  $x^2 - 7x - 1 = 0$ ;      b)  $2x^2 + 7x - 3 = 0$ ;      c)  $(x-3)^2 + 2(x-1)^2 = 4x + 3$ ;

d)  $x^2 - \sqrt{2}x - 1 = 0$ ;      d)  $x^2 + (a^2 + 1)x + b^2 + 1 = 0$ .

□18. Fie  $x^2 + ax + b = 0$  și  $x_1, x_2$  soluțiile acesteia. Să se formeze ecuația de gradul doi cu soluțiile:

a)  $y_1 = -x_1, y_2 = -x_2$ ;

b)  $y_1 = 1 - x_1, y_2 = 1 - x_2$ ;

c)  $y_1 = 2 + x_1, y_2 = 2 + x_2$ ;

d)  $y_1 = x_1 + 2x_2, y_2 = 2x_1 + x_2$ ;

e)  $y_1 = x_1^2, y_2 = x_2^2$ ;

f)  $y_1 = 1 + x_1 + x_1^2, y_2 = 1 + x_2 + x_2^2$ .

□19. Să se determine valorile lui  $m \in \mathbb{R}$  pentru care soluțiile  $x_1, x_2$  ale ecuației  $x_2 - 2mx + m - 1 = 0$  verifică condițiile  $x_1 < 1 < x_2$ .

□20. Se dă ecuația  $(m^2 - 1)x^2 - (2m + 1)x + 1 = 0$ .

Să se determine  $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  astfel încât soluțiile  $x_1, x_2$  ale ecuației să verifice una din condițiile:

a)  $x_1 < 1, x_2 < 1$ ;

b)  $x_1 < 1, x_2 > 1$ ;

c)  $x_1 > 1, x_2 > 1$ .

□21. Pentru ce valori ale lui  $m \in \mathbb{R}$  soluțiile  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  ale ecuației  $(m-3)x^2 - 2(m-1)x + m = 0$  sunt mai mici decât 2?

□22. Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  știind că:

a)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x + m = 0\} \cap (1, +\infty) \neq \emptyset$ ;

b)  $\{x \in \mathbb{R} \mid (m+1)x^2 - 2(m-2)x + m - 4 = 0\} \cap (2, +\infty)$  are două elemente;

c)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + m = 0\} \cap (1, 4)$  are două elemente;

d)  $\{x \in \mathbb{R} \mid mx^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0\} \cap (1, +\infty)$  are un singur element.

□23. Se consideră ecuația  $x^2 - 6x + 4 = 0$  și fie  $S_n = x_1^n + x_2^n, n \in \mathbb{N}^*$ .

a) Să se calculeze  $S_1, S_2, S_3$ .

b) Să se arate că pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$  are loc egalitatea:  $S_{n+2} = 6S_{n+1} - 4S_n$ .

c) Să se arate că pentru oricare  $n \in \mathbb{N}^*$  numărul  $S_n$  este natural și se divide cu  $2^n$ .

□24. Să se rezolve sistemele de ecuații:

a)  $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$ ;      b)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$ ;      c)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$ ;      d)  $\begin{cases} x + y + xy = 5 \\ 2(x + y) - 3xy = 0 \end{cases}$ ;

e)  $\begin{cases} 2(x + y) + 3xy = 7 \\ 7(x + y) - 9xy = 5 \end{cases}$ ;      f)  $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4 \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$ ;      g)  $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$ ;

h)  $\begin{cases} x + y + x^2y^2 = 7 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \end{cases}$ ;      i)  $\begin{cases} x + y = 3 \\ x^3 + y^3 = 9 \end{cases}$ ;      j)  $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 1 \\ x + y + xy = -1 \end{cases}$ ;

k)  $\begin{cases} 2x^2 + 3xy + 2y^2 = 4 \\ x + y - xy = 1 \end{cases}$ ;      l)  $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \end{cases}$ ;      m)  $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 2 \\ 2xy + 3x + 3y = -7 \end{cases}$ .

□25. Să se rezolve sistemele de ecuații:

a)  $\begin{cases} 2(x^3 + y^3) = 9xy \\ x + y = 3 \end{cases}$ ;      b)  $\begin{cases} x^3 + y^3 = -3,5xy \\ x + y + xy = -1 \end{cases}$ ;      c)  $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 13 \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1, (1) \end{cases}$ ;

d)  $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{4} \end{cases}$ ;      e)  $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x^3 + y^3 = -7 \end{cases}$ ;      f)  $\begin{cases} x + y + 2xy = -5 \\ x^2y + xy^2 = 2 \end{cases}$ ;

g)  $\begin{cases} x + xy + y = 5 \\ 2x - xy + 2y = 4 \end{cases}$ ;      h)  $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6xy = 68 \\ 2x^2 + 2y^2 - 3xy = 16 \end{cases}$ ;      i)  $\begin{cases} x^3 + y^3 - 2(x + y) = 25 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$ .

□26. Folosind notații convenabile, să se rezolve sistemele:

a)  $\begin{cases} x + y = 5 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 \end{cases}$ ;      b)  $\begin{cases} x + y = 5 \\ x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6 \end{cases}$ ;

c)  $\begin{cases} xy = 4 \\ x + y + \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8 \end{cases}$ ;      d)  $\begin{cases} x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 9 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 \end{cases}$ ;

e)  $\begin{cases} xy + \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 \\ x + y + \sqrt{xy} = 3 \end{cases}$ ;      f)  $\begin{cases} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+2} = 2 \\ \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(y+2)^2} = 2 \end{cases}$ .

### 3 MONOTONIA FUNCȚIEI DE GRADUL AL DOILEA

- 1. Să se stabilească intervalele de monotonie pentru funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :
- a)  $f(x) = x^2 - 1$ ; b)  $f(x) = x^2 - x$ ; c)  $f(x) = -x^2 + 2x$ ; d)  $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ ;  
 e)  $f(x) = x^2 - 2x + 2$ ; f)  $f(x) = -x^2 + 4x - 4$ ; g)  $f(x) = -2x^2 + 6x - 1$ .
- 2. Să se studieze intervalele de monotonie pentru funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , date de:
- a)  $f(x) = (m^2 + 1)x^2 - 2x + 1$ ; b)  $f(x) = mx^2 + 2x + 1$ ;  
 c)  $f(x) = (m - 1)x^2 - 2mx$ ; d)  $f(x) = (m^2 - 4)x^2 + (m - 2)x$ ;  
 e)  $f(x) = (m - 2)(m - 3)x^2 - 2(m - 2)x + m$ ;  
 f)  $f(x) = (mx - 1)^2 + (mx - 2)^2$ .
- 3. Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  pentru care funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  are proprietatea specificată, în cazurile:
- a)  $f(x) = x^2 - 2mx$  este crescătoare pe  $[-5, +\infty)$ ;  
 b)  $f(x) = -2x^2 + 4mx + 3$  este descrescătoare pe  $[-2, +\infty)$ ;  
 c)  $f(x) = mx^2 + 2(m + 1)x + m + 2$ ,  $m \neq 0$ , este crescătoare pe  $(-\infty, 2]$  și descrescătoare pe  $(2, +\infty)$ .
- 4. Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$  știind că funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + (3a - 1)x - 2b$  este descrescătoare pe  $(-\infty, 5]$ , crescătoare pe  $[5, +\infty)$  și  $\text{Im } f = [-9, +\infty)$ .
- 5. Să se studieze monotonia funcțiilor  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :
- a)  $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \leq 2 \\ -2x^2 + 10, & x > 2 \end{cases}$ ; b)  $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & x \leq 1 \\ -5x^2 + 6, & x > 1 \end{cases}$ ;  
 c)  $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 3x - 1, & x \leq 2 \\ x^2 - 3x, & x > 2 \end{cases}$
- 6. Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  pentru care funcția
- $$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1, & x \in (-\infty, 1) \\ mx + 1, & x \in [1, 2] \\ -x^2 + 4x - 11, & x \in (2, \infty) \end{cases}$$
- este strict descrescătoare pe  $\mathbb{R}$ .
- 7. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 5, & x \in (2, +\infty) \\ ax + b, & x \in [0, 2] \\ x - 1, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$ .
- Să se determine mulțimea perechilor  $(a, b)$  de numere reale pentru care funcția este strict crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .

- 8. Să se studieze monotonia funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , în cazurile:
- a)  $5f(x - 1) + 7f(1 - x) = x^2 + x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ ;  
 b)  $f(2x - 1) + 2f(3 - 2x) = 2x^2 - x, \forall x \in \mathbb{R}$ .
- 9. Să se studieze monotonia funcțiilor  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dacă:
- a)  $f(x) = \min\{t^2 - 2t \mid t \leq x\}$ ;  
 b)  $f(x) = \min\{t^2 - t + 1 \mid t \in [x, x + 2]\}$ ;  
 c)  $f(x) = \max\{-t^2 + 4t + 3 \mid t \leq x\}$ .
- 10. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -x^2 + 4(3m + 1)x + 5$ . Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  pentru care funcția este crescătoare pe intervalul  $(-1, 8)$ .
- 11. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (m - 3)x^2 + (3m - 7)x + 2m - 1$ ,  $m \neq 3$ . Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  astfel încât  $f$  să fie descrescătoare pe intervalul  $\left[-1, \frac{3}{2}\right]$ .
- 12. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3mx^2 + 6(m - 1)x + m + 2$ ,  $m \in \mathbb{R}$ . Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  pentru care  $f$  este strict crescătoare pe intervalul  $[-3, -1]$ .

### 4 SEMNUL FUNCȚIEI DE GRADUL AL DOILEA INECUAȚII DE GRADUL AL DOILEA

- 1. Să se stabilească semnul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :
- a)  $f(x) = x^2 - 3x$ ; b)  $f(x) = 2x^2 + 4x$ ;  
 c)  $f(x) = -x^2 + 5x$ ; d)  $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$ ;  
 e)  $f(x) = x^2 - 2x + 1$ ; f)  $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ ;  
 g)  $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$ ; h)  $f(x) = x^2 + 1$ ;  
 i)  $f(x) = x^2 - 2x + 2$ ; j)  $f(x) = -x^2 + 5x - 9$ .
- 2. Folosind semnul funcției de gradul al doilea să se stabilească semnul funcțiilor  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ :
- a)  $f(x) = x(x^2 - 4)$ ; b)  $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 9)$ ;  
 c)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$ ; d)  $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 3x + 2}$ ;

e)  $f(x) = \frac{x(x^2 - 3x - 4)}{x^2 - 4}$ ;      f)  $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$ ;  
 g)  $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ ;      h)  $f(x) = x^4 - 17x^2 + 16$ .

□3. Să se rezolve inecuațiile în mulțimea  $\mathbb{D}$ :

a)  $x^2 - 14x - 15 > 0$ ;      b)  $5x^2 - 8x + 8 \leq 0$ ;  
 c)  $-x^2 + \sqrt{5}x + 11 \geq 0$ ;      d)  $(1 - \sqrt{3})x^2 + 3x - 1 - \sqrt{3} < 0$ ;  
 e)  $-3x^2 + 2x - 1 \geq 0$ ;      f)  $2x^2 + 3x - 5 \geq 0$ .

□4. Să se rezolve inecuațiile în mulțimea  $\mathbb{D}$ :

a)  $(x - 2)^2 + 3(x + 2)^2 \geq (x + 4)^2$ ;  
 b)  $(3 - x)^2 - 2(2x + 1)^2 \leq 6 + (3x + 1)^2$ ;  
 c)  $(2x + 3)^2 + 2(3x + 2)^2 \geq 1 + (2x + 4)^2$ ;  
 d)  $(x + 1)^2 + x^2 - 5(x - 1)^2 \geq 2(x - 4)^2$ ;  
 e)  $(x - 2)(x + 3) - 5(x + 1)(x - 4) \leq x^2 - (x - 4)^2$ ;  
 f)  $(x - 1)^2 + 2(x - 2)^2 + 3(x - 3)^2 \geq (5x + 6)^2$ ;  
 g)  $(x - 3)^3 - (x + 2)^3 + 5(x^2 + 5) \geq 0$ .

□5. Să se rezolve în mulțimea  $\mathbb{D}$ :

a)  $x(x^2 - 3x + 2) \geq 0$ ;      b)  $(x - 1)(x^2 - 9) \leq 0$ ;  
 c)  $(x^2 - 3x)(x^2 - 3x + 2) \leq 0$ ;      d)  $\frac{x^2 - 1}{9 - x^2} \geq 0$ ;  
 e)  $\frac{x - 1}{x + 1} \geq \frac{3x}{x + 2}$ ;      f)  $\frac{x + 2}{x - 2} < \frac{x - 2}{x + 2}$ ;  
 g)  $\frac{x^2 - 2x + 4}{-x^2 + 4x} \leq 1$ ;      h)  $\frac{x^2 - 14x + 33}{x^2 - 3x - 10} > 0$ ;  
 i)  $(x + 3)(x - 2)(x^2 - 1) > 0$ ;      j)  $\frac{4x^2 - 5x - 1}{2x^2 - 5x + 3} > 1$ ;  
 k)  $\frac{x^2 - (x^2 - 1)^2}{x^2 - 9} \geq 0$ .

□6. Să se rezolve inecuațiile folosind notațiile convenabile:

a)  $(x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) - 8 \leq 0$ ;  
 b)  $(x + 3)(x + 4)(x - 3)(x - 4) \geq 120$ ;  
 c)  $(x - 5)(x - 4)(x - 3)(x - 2) < 8$ ;

d)  $(x^2 - 3x - 4)^2 + 3x^2 - 9x - 16 \leq 0$ ;

e)  $\frac{8x^2}{x^2 + x + 2} \geq x^2 - x + 2$ ;  
 f)  $\left(\frac{3x - 7}{x - 3}\right)^2 + 20 \geq \frac{9(7 - 3x)}{3 - x}$ ;  
 g)  $(x^2 + x)^2 + x^2 + x - 2 \geq 0$ .

□7. Să se explicitizeze legea de corespondență a funcțiilor  $f: D \rightarrow \mathbb{D}$ :

a)  $f(x) = |x^2 - 3x|$ ;      b)  $f(x) = |x^2 + 3x + 2|$ ;  
 c)  $f(x) = x|x^2 - 1|$ ;      d)  $f(x) = \frac{|x^2 - 6x|}{|9 - x^2|}$ ;  
 e)  $f(x) = \frac{|x(3x^2 - 2x - 1)|}{|x^2 - 4x - 5|}$ .

□8. Să se determine valorile parametrului real  $m$  pentru care au loc relațiile:

a)  $(m - 1)x^2 - x + m - 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{D}$ ;  
 b)  $mx^2 + 2(m + 1)x + m + 1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{D}$ ;  
 c)  $(m - 1)x^2 - 2mx + m < 0, \forall x \in \mathbb{D}$ ;  
 d)  $(1 - 2m)x^2 - 2mx - 2m \geq 0, \forall x \in \mathbb{D}$ ;  
 e)  $mx(2 - x) \leq 2x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{D}$ .

□9. Să se determine valorile parametrului real  $m$  pentru care:

a)  $\frac{x^2 + mx + m^2 - m}{x^2 + 4mx + 5m^2 + 3} \geq 0, \forall x \in \mathbb{D}$ ;  
 b)  $\frac{x^2 + 2(m + 1)x + m + 1}{2x^2 + (m - 1)x + 2(m - 1)} \geq 0, \forall x \in \mathbb{D}$ .

□10. Să se determine  $\text{Im} f$  pentru funcțiile  $f: D \rightarrow \mathbb{D}$ :

a)  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ ;      b)  $f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}$ ;      c)  $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - x + 1}$ ;  
 d)  $f(x) = \frac{3x - 1}{3x^2 + 1}$ ;      e)  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2}$ ;      f)  $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$ .

□11. Să se determine  $m \in \mathbb{D}$  pentru care inecuațiile nu au nicio soluție:

a)  $(m + 1)x^2 + mx + m < 0$ ;  
 b)  $(m^2 - m - 2)x^2 - 2(m + 4)x + 2 > 0$ ;  
 c)  $mx^2 + 3(m + 1)x + 3(m + 1) < 0$ .

□ 12. Să se reprezinte grafic funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

- a)  $f(x) = \max(3x^2 - 5x + 2, x + 2)$ ;
- b)  $f(x) = \min(2x^2 + 3x - 2, x^2 - 2)$ ;
- c)  $f(x) = \min(x^2 - 3x, 0) + \max(x^2 + 3x, 0)$ ;
- d)  $f(x) = \min(x^2 - 3x, -2) + \max(x^2 + 3x, -2)$ .

□ 13. Să se determine valorile parametrului real  $m$  pentru care inegalitățile sunt verificate pentru oricare  $x \in \mathbb{R}$ :

- a)  $(m - 2)x^2 + (m - 3)x + m - 3 < 0$ ;
- b)  $(2m + 1)x^2 - 3(m + 1)x + m + 3 > 0$ ;
- c)  $(m^2 - 3m)x^2 - 2(m + 3)x + 2 > 0$ ;
- d)  $(m - 3)x^2 + 2(2m + 1)x + 5m - 11 > 0$ .

□ 14. Să se determine valorile lui  $m \in \mathbb{R}$  pentru care soluția inecuațiilor este mulțimea  $\mathbb{D}$ :

- a)  $\frac{x^2 - 5x + 8}{(m - 1)x^2 + 2mx + 9m - 5} < 0$ ;
- b)  $\left| \frac{x^2 - (2 + m)x + m + 2}{x^2 + 3x + 3} \right| \leq 3$ ;
- c)  $\left| \frac{(m - 1)x^2 + (m - 2)x - 1}{(1 + m^2)x^2 - 2mx + 1} \right| < 2$ .

□ 15. Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  pentru care:

- a) inecuația  $(m^2 - 3m)x^2 - 2(m - 3)x + 2 < 0$  nu are soluții;
- b) inecuația  $x^2 - (m + 2)x + 5 - m < 0$  este verificată pentru oricare  $x \in (1, 3)$ ;
- c) inecuația  $x^2 - (m - 2)x + m - 9 > 0$  este verificată numai pentru  $x \in (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$ .

□ 16. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (a + 3)x^2 - (a + 4)x + a + 4$ ,  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ .

Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  pentru care:

- a)  $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ;
- b)  $f(x) > 0, \forall x \in (-\infty, 0)$ ;
- c)  $f(x) \leq 0, \forall x \in [0, +\infty)$ ;
- d)  $f(x) > 0, \forall x \in (-\infty, -2)$ .

□ 17. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x^2 + (m + 3)x + 3m - 1$ .

- a) Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  astfel încât parabola asociată funcției  $f$  să intersecteze axa  $Ox$  în două puncte situate la distanța 3.
- b) Pentru ce valori ale lui  $m \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ?
- c) Pentru ce valori  $m \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) \geq 0, \forall x \in (0, +\infty)$ ?

□ 18. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 2(1 + 3m)x + 7(2m + 3)$ . Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  pentru care  $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\} \cap (0, +\infty) = \emptyset$ .

□ 19. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3mx^2 - 2mx + 13x^2 + 6x + 1$ .

- a) Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  pentru care parabola asociată funcției  $f$  intersectează axa  $Ox$  în două puncte cu abscisele situate între  $-1$  și  $1$ .
- b) Există valori ale lui  $m$  pentru care abscisele punctelor de intersecție sunt mai mici decât  $-1$ ?

□ 20. Se consideră ecuația  $(m - 3)x^2 - 2(m - 1)x + 3 - 2m = 0$ ,  $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ . Să se determine  $m \in \mathbb{R}^+$  astfel încât:

- a) ambele soluții ale ecuației să fie mai mici decât  $1$ ;
- b) ambele soluții ale ecuației să fie mai mari decât  $1$ ;
- c) o soluție să fie mai mică decât  $1$  și alta mai mare decât  $1$ .

□ 21. Fie ecuația  $(1 - m)x^2 - 2(m + 1)x - m - 2 = 0$ . Să se determine valorile lui  $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  pentru care are soluțiile în afara intervalului  $[-3, 0]$ .

□ 22. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - mx + m}{x^2 - 3x + 3}$ . Să se determine valorile lui  $m \in \mathbb{R}$  pentru care  $\text{Im } f \subset [-3, 2]$ .

□ 23. Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  pentru care funcția

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{(2m + 3)x^2 - (m + 2)x - m - 1}{x^2 + (m - 3)x - m^2 + 3m}$$

să aibă  $\text{Im } f \subset [0, +\infty)$ .

□ 24. Pentru ce valori  $m \in \mathbb{R}$  funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{(5m + 1)x^2 - (m + 2)x + 1}{3x^2 + (m + 4)x + m + 4}$  are  $\text{Im } f \subset [0, +\infty)$ ?

□ 25. Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  pentru care valorile funcției:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{(m - 2)x^2 - (m - 2)x + 1}{x^2 - 2(m - 3)x + m - 1}$$

sunt negative.

□ 26. Să se determine valorile parametrului real  $m$  în cazurile:

- a)  $x^2 + y^2 - 5x - 3y + m > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ ;
- b)  $2x^2 + 3y^2 - 5x - 3y + m + 1 > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ ;
- c)  $4x^2 + 9y^2 - 4x - 12y + m^2 + 1 > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ ;
- d)  $x^2 + y^2 - 2mx + 4y + 2m^2 - 5 > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ .

□27. Fie  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{ax^2 - bx + 1}{x^2 + 1}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Să se determine valorile parametrilor  $a, b \in \mathbb{R}$  cu proprietatea că  $\text{Im} f = \left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$ .

□28. Fie  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{ax^2 + 2x + b}{x^2 + 1}$ . Să se determine valorile parametrilor  $a, b \in \mathbb{R}$  pentru care  $\text{Im} f = [-1, 1]$ .

□29. Să se determine  $f(\mathbb{D} \setminus \{2\})$  pentru funcția:

$$f: \mathbb{D} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 - 3x}{(x-2)^2}.$$

## 5 POZIȚIA RELATIVĂ A UNEI DREPTE FAȚĂ DE O PARABOLĂ

□1. Se consideră parabola de ecuație  $y = 2x^2 - 3x$ . Să se determine poziția dreptei  $d$  față de parabola dată și să se afle punctele comune în caz de intersecție, știind că ecuația dreptei  $d$  este:

- a)  $y = 0$ ;                      b)  $y = -1$ ;                      c)  $y = -3x$ ;  
 d)  $y = -5x - \frac{1}{2}$ ;                  e)  $y = -2x - 1$ ;                  f)  $y = ax$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

□2. Fie parabola de ecuație  $y = x^2 + mx + 1$ . Să se determine valorile lui  $m \in \mathbb{R}$  pentru care dreapta  $y = x + m$ :

- a) este tangentă parabolei;  
 b) este secantă parabolei;  
 c) este exterioară parabolei.

□3. Fie parabola  $y = (m-1)x^2 - 2mx + 1$ ,  $m \neq 1$ .

Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  pentru care:

- a) dreapta  $y = 2x + \frac{29}{4}$  este tangentă parabolei;  
 b) dreapta  $y = 2$  este tangentă parabolei;  
 c) dreapta  $2mx - 3$  este secantă parabolei.

□4. Să se discute în funcție de parametrul real  $m$  poziția dreptei  $y = -mx + m - 1$  față de parabola  $y = x^2 + (m-1)x + m$ .

□5. Să se precizeze poziția dreptei  $y = 2x$  în raport cu parabolele  $y = x^2 + 1$  și  $y = -x^2 + 6x - 4$ .

□6. Să se demonstreze că pentru oricare  $m \in \mathbb{R}$  dreapta  $y = x - 2$  este tangentă parabolelor  $y = 2x^2 + (4m - 3)x + 2m^2 - 4m$ .

□7. Se consideră funcțiile de gradul al doilea  
 $f, g, h: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (m-3)x^2 + 2(m-4)x + m - 5$ ,  
 $g(x) = (5m+6)x^2 - (m+3)x + 1$ ,  $h(x) = x^2 - 2(m-5)x + m - 3$ .  
 Să se studieze poziția axei  $Ox$  față de graficele funcțiilor  $f, g, h$  discutând după parametrul  $m \in \mathbb{R}$ .

□8. Se consideră parabolele  $y = x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 3m + \frac{5}{4}$  și  $y = 2x^2 + (m-2)x + \frac{m^2 - 6m + 1}{8}$ ,  $m \in \mathbb{R}$ . Să se arate că dreapta  $y = x - 1$  este tangentă ambelor parabole pentru oricare  $m \in \mathbb{R}$ .

□9. Să se scrie ecuația dreptei tangente la parabola dată în punctele specificate:

- a)  $y = x^2 - 3x + 2$ ,  $A(2, 0)$ ,  $B(3, 2)$ ;  
 b)  $y = -x^2 + x + 2$ ,  $A(-1, 0)$ ,  $B(3, -4)$ .

□10. Se consideră parabolele  $y = x^2 - mx + m^2$ . Să se arate că pentru oricare  $m \in \mathbb{R}$  dreapta  $y = mx - m^2 - 1$  este exterioară parabolelor.

□11. Se consideră parabolele  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ . Să se găsească condițiile în care parabola este simultan tangentă ambelor bisectoare ale sistemului cartezian.

□12. Să se determine parabolele  $y = ax^2 + bx + c$  cu proprietatea că dreptele  $y = 2x - 2$ ,  $y = -x - 2$  sunt simultan tangente parabolei. Să se arate că vârfurile parabolelor găsite sunt coliniare.

□13. Se consideră parabolele  $y = x^2 + (2m-2)x + \frac{(2m-3)^2}{4}$ . Să se determine valorile lui  $m \in \mathbb{R}$  pentru care parabolele sunt tangente graficului funcției  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x$ .

□14. Să se determine funcția de gradul al doilea al cărei grafic conține punctele  $A(0, 1)$ ,  $B(1, 3)$  și este tangent dreptei de ecuație  $y + 3x - 2 = 0$ .

□15. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 2 \sin \alpha \cdot x + 2 + 2 \sin \alpha$ .

a) Să se studieze poziția dreptei  $y = 2x + \cos^2 \alpha$  în raport cu parabola dată.

b) Să se arate că pentru  $\alpha \in \mathbb{R}$  vârfurile parabolilor se găsesc pe altă parabolă.

c) În cazul în care dreapta dată este tangentă parabolilor, să se arate că punctele de tangentă aparțin unei parabole fixe.

□16. Să se determine în funcție de parametrul real  $m$  numărul punctelor de intersecție dintre graficele funcțiilor  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 2x - 5$ ,  $g(x) = mx - 9$ .

□17. Să se determine valorile lui  $m \in \mathbb{R}$  pentru care parabolele asociate funcțiilor  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (m-1)x^2 - (2m-3)x + m - 3$ ,  $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  sunt situate sub prima bisectoare a axelor de coordonate.

□18. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = mx^2 - (m-1)x + 2$ .

Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  pentru care graficul funcției  $f$  este situat deasupra dreptei de ecuație  $y = (m-1)x$ .

□19. Se dau dreptele de ecuație  $y = x - 1$ ,  $y = -2x + 4$  și funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = mx^2 - 2(m+3)x + 33$ . Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  pentru care parabola asociată funcției  $f$  este deasupra dreptelor date.

## 6 POZIȚIA RELATIVĂ A DOUĂ PARABOLE

□1. Să se rezolve sistemele de ecuații și să se interpreteze geometric:

a)  $\begin{cases} x^2 - 1 = y \\ -x^2 + 3x - 1 = y \end{cases};$       b)  $\begin{cases} y = 4x^2 - 5x + 2 \\ y = -x^2 + 3x + 2 \end{cases};$

c)  $\begin{cases} 2x^2 - 3x - 5 = y \\ x^2 - 3x + 4 = y \end{cases};$       d)  $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 2 \\ y = x^2 + 2x + 2 \end{cases};$

e)  $\begin{cases} y = (x-1)^2 \\ y = (2x-1)^2 \end{cases};$

□2. Se dau parabolele  $y = x^2 - mx + 1$  și  $y = 2x^2 - 3(m+1)x + 5$ . Să se determine valorile lui  $m \in \mathbb{R}$  pentru care:

a) parabolele sunt tangente;

b) parabolele sunt secante.

□3. Să se studieze în funcție de  $m \in \mathbb{R}$  poziția parabolilor:  
 $y = (m-1)x^2 + 4(m-1)x + 10m + 10$ ;  $y = x^2 - 2(m-1)x + m - 3$ .

□4. Să se studieze poziția parabolilor:

a)  $y = x^2 - 2x + 1$ ,  $y = x^2 + mx + 3 + m$ ;

b)  $y = x^2 - x$ ,  $y = 2x^2 + m$ ;

c)  $y = 2x^2 - 3x$ ,  $y = mx^2 - 2x + m - \frac{11}{4}$ ;

d)  $y = mx^2 - m$ ,  $y = x^2 - 2mx - 12$ .

□5. Se consideră funcțiile de gradul al doilea:  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $g(x) = Ax^2 + Bx + C$ .

Să se demonstreze că dacă graficele celor două funcții sunt tangente în vârful lor, are loc egalitatea  $4aA(C-c) = bB(A-a)$ .

□6. Se consideră parabolele  $y = x^2$  și  $y = \frac{1}{2}x^2 + mx - \frac{1}{2}m^2$ .

a) Să se arate că pentru oricare  $m \in \mathbb{R}$  cele două parabole sunt tangente.

b) Să se scrie ecuația tangentei comune celor două parabole.

□7. Fie parabolele  $y = x^2 - 2x + 1$  și  $y = -x^2 - 2x - 1$ .

a) Să se determine dreptele care sunt simultan tangente ambelor parabole.

b) Să se arate că parabolele  $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - x - \frac{\sqrt{3}}{2}$  și  $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - 3x - \frac{\sqrt{3}}{2}$

sunt simultan tangente parabolilor date.

c) Să se arate că există o infinitate de parabole  $y = ax^2 + bx + c$  care sunt simultan tangente parabolilor date.

d) Să se arate că există o infinitate de parabole  $y = ax^2 + bx + c$  care sunt simultan tangente parabolilor date.

□8. Să se rezolve sistemele de ecuații:

a)  $\begin{cases} y = 3x^2 - 4x \\ y^2 = (x^2 - x)^2 \end{cases};$       b)  $\begin{cases} y = 5x^2 - x \\ y^2 = (2x + 2)^2 \end{cases};$

c)  $\begin{cases} |x^2 - x| = y \\ y^2 = (x^2 + x)^2 \end{cases};$       d)  $\begin{cases} (x^2 + 2x)^2 = y^2 \\ (2x^2 - 3x)^2 = y^2 \end{cases};$

TESTE DE VERIFICARE

Testul nr. 1

- 1. Să se determine funcția de gradul al doilea al cărei grafic conține punctele  $A(3, 2)$ ,  $B(-1, 6)$  și  $C(-2, 12)$ .
- 2. Funcția de gradul al doilea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + 3x + b$  are minimumul egal cu 1 și axa de simetrie  $x = -\frac{3}{4}$ . Să se studieze monotonia funcției  $f$ .
- 3. Să se rezolve inecuațiile:
  - a)  $(3x - 2)^2 + 4(2 + 3x)^2 \leq 20(x - 3)^2$ ;
  - b)  $\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 2x - 3} \geq 0$ .
- 4. Să se găsească o relație independentă de  $m \in \mathbb{R}$  între soluțiile  $x_1, x_2$  ale ecuației  $(m + 6)x^2 - 4mx + m + 1 = 0$ ,  $m \in \mathbb{R} \setminus \{-6\}$ .

Testul nr. 2

- 1. Să se determine valorile parametrilor  $a, b \in \mathbb{R}$  pentru care ecuațiile de gradul al doilea au aceleași soluții:
  - a)  $(a - b)x^2 + (a + b - 1)x + 4 = 0$ ;
  - b)  $(a + b)x^2 + (2a + 3b - 3)x + 8 = 0$ .
- 2. Să se determine funcția de gradul al doilea știind că admite un maxim egal cu  $m^2 + 7m$  pentru  $x = m$  și graficul său conține punctul  $M(1, -1 + 9m)$ . Să se afle apoi valorile lui  $m \in \mathbb{R}$  pentru care parabola  $y = x^2 + 16$  este tangentă parabolei asociate funcției găsite.
- 3. Să se determine condițiile necesare și suficiente pentru a avea loc inegalitatea:
 
$$ax^2 + bx + c \leq \frac{a + b + c}{3}(x^2 + x + 1), \forall x \in \mathbb{R}.$$
- 4. Să se rezolve sistemele de ecuații:
  - a)  $\begin{cases} 2(x + y) - 3xy = 1 \\ 5(x + y) + 4xy = 14 \end{cases}$ ;
  - b)  $\begin{cases} 3(x^2 + 1)(y^2 + 1) = 20xy \\ 3(x + 1)^2(y + 1)^2 = 64xy \end{cases}$

Testul nr. 3

- 1. Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  pentru care parabolele:  $y = mx^2 - 2(m + 2)x - 1$ ,  $y = x^2 - 2x + m$  au două puncte comune diferite.
- 2. Să se determine  $\text{Im} f$  pentru  $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{(x - 1)^2}$ .
- 3. Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  pentru care:  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (m - 2)x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0\} \subset (-\infty, 0]$ .
- 4. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale sistemul  $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ xy + yz + zx + z = 7 \end{cases}$ .

Testul 4

- 1. Să se determine valorile lui  $m \in \mathbb{R}$  pentru care expresia:  $E = \frac{x^2 + (m + 1)x + m + 2}{x^2 + x + m}$  este definită pe  $\mathbb{R}$  și pozitivă pentru oricare  $x \in \mathbb{R}$ .
- 2. Să se determine funcția de gradul al doilea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea că  $(f \circ f)(x) - 4f(x^2) + 4f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ .
- 3. Se consideră  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$ . Să se determine  $\text{Im} f$ .
- 4. Să se rezolve inecuațiile:
  - a)  $\frac{x - 1}{x + 1} \geq \frac{3x - 1}{2x + 1}$ ;
  - b)  $|x^2 - 3x + 2| \leq |x + 2|$ .

## V. PROBLEME RECAPITULATIVE DE ALGEBRĂ

**R1.** Fie  $a, b, c \in \mathbb{R}$  astfel încât  $a+b+c \in \mathbb{Q}$  și  $a^2+b^2+c^2 \in \mathbb{Q}$ .

Să se arate că  $ab+bc+ca \in \mathbb{Q}$ .

**R2.** Să se demonstreze că numerele  $\sqrt{n^2+1}$ ,  $\sqrt{n^2+8}$  sunt numere raționale pentru un număr finit de valori ale lui  $n \in \mathbb{N}$ . Rămâne această proprietate adevărată dacă  $n \in \mathbb{Q}$ ?

**R3.** Să se arate că numerele  $\sqrt{2}+1$ ,  $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$  sunt numere iraționale.

**R4.** Să se arate că dacă  $a, b, c \in \mathbb{Q}$  și  $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c\sqrt{5}=0$  atunci  $a=b=c$ .

**R5.** Fie  $A = \{x+y\sqrt{5} \mid x, y \in \mathbb{Q} \text{ și } x^2-ay^2=1\}$ .

Să se arate că pentru orice  $\alpha, \beta \in A$  are loc relația  $\alpha\beta \in A$ , dacă și numai dacă  $a=5$ .

**R6.** Fie  $x, y, z \in \mathbb{R}$  astfel încât  $\{x+y+z, x^2+y^2+z^2, x^3+y^3+z^3\} \subset \mathbb{Q}$ . Să se arate că  $xyz \in \mathbb{Q}$ .

**R7.** Să se arate că dacă  $x, y \in \mathbb{Z}$  atunci numărul  $A=2[x^4+y^4+(x-y)^4]$  este pătrat perfect.

**R8.** Să se arate că dacă  $a, b \in \mathbb{Q}$  și  $c = \frac{ab}{a+b}$ , atunci  $\sqrt{a^2+b^2+c^2} \in \mathbb{Q}$ .

**R9.** Să se arate că dacă  $a, b, c \in \mathbb{R}$  și  $ax^2+bx+c \in \mathbb{Q}$  pentru oricare  $x \in \mathbb{R}$ , atunci  $a=b=0$  și  $c \in \mathbb{Q}$ .

**R10.** Să se demonstreze că pentru oricare  $a, b, c \in (0, +\infty)$  au loc inegalitățile:

a)  $a^3+b^3 \geq 3ab$ ;

b)  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{8}{(a+b)^2}$ ;

c)  $\frac{a}{b^3} + \frac{b}{a^3} \geq \frac{8}{(a+b)^2}$ ;

d)  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ ;

e)  $\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{a+c} \geq \frac{a+b+c}{2}$ ;

f)  $\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$ .

g)  $\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq a+b+c$ .

**R11.** Să se demonstreze că pentru oricare  $a, b, c \in \mathbb{R}$  și  $x, y, z \in (0, +\infty)$  are loc inegalitatea:  $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{(x+y+z)}$ , cu egalitate dacă și numai dacă

$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ . (**Inegalitatea lui Cauchy-Schwartz**)

**R12.** Să se determine numerele reale  $a, b, c$  cu proprietatea că:

$\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c-1} + \sqrt{c+a-2} = a+b+c$ .

**R13.** Să se expliciteze:

a)  $E(x) = |x-2| + |3x|$ ;

b)  $E(x) = |2x-1| + 2|x-1|$ ;

c)  $E(x) = |x-1| + |x-2| + 2|x|$ ;

d)  $E(x) = x + |x-1| + 2|x|$ .

**R14.** Să se rezolve ecuațiile:

a)  $|x-1| = 5x+1$ ;

b)  $|x-2| + 2|x| = 2$ ;

c)  $2|x+1| + 3|x-2| = 7$ ;

d)  $|x+3| - 3|x| = x+3$ ;

e)  $2|3x-2| + 3|2x-3| = 5$ ;

f)  $|x+1| + x|x| = 3$ ;

g)  $|x-3| - |x| = 2-x$ ;

h)  $|x-2| + |x-1| - |x+3| = -3$ ;

i)  $|2x+3| - |7x+5| + |x-2| = 2$ ;

j)  $|x+1| + x|x| + |x-1| = 3$ ;

k)  $|x+4| + |x+3| = |2x+7|$ .

**R15.** Să se discute în raport cu parametrul  $m \in \mathbb{R}$  ecuațiile:

a)  $|x| = m-2$ ;

b)  $|x-1| = x+m$ ;

c)  $|x-m| = 2$ ;

d)  $|x-6| + |x-10| = m$ ;

e)  $|x-3| + 2|x| = m$ ;

f)  $2|x-1| + |x-2| = x+m$ .

**R16.** Să se rezolve ecuațiile:

a)  $\left[\frac{x+2}{3}\right] = 1$ ;

b)  $\left[\frac{x-1}{3}\right] = \frac{x-2}{2}$ ;

c)  $\left[\frac{2x+1}{3}\right] = \frac{4-x}{3}$ ;

d)  $\left[\frac{x-1}{x+1}\right] = 3x-1$ ;

e)  $\left[\frac{3x+4}{5}\right] = \frac{4x+3}{5}$ ;

f)  $2\left[\frac{x+1}{2}\right] = 3\left[\frac{x+1}{3}\right] + 2$ ;

g)  $\left[\frac{2x+1}{3}\right] = \left[\frac{3x+1}{4}\right]$ ;

h)  $\left[\frac{x^2-1}{2}\right] = \left[\frac{x^2+1}{3}\right]$ ;

i)  $\left[\frac{2x+1}{3}\right] + \left[\frac{4x+5}{6}\right] = \frac{5x+1}{3}$ .

R17. Să se rezolve sistemele de ecuații:

$$\text{a) } \begin{cases} x + [y] = 2,2 \\ y + [x] = 2,7 \end{cases}; \text{ b) } \begin{cases} x + [y] = 5,1 \\ y + \{x\} = 4,3 \end{cases}; \text{ c) } \begin{cases} x = y[x] \\ y = x\{y\} \end{cases}; \text{ d) } \begin{cases} x + y = x[y] \\ xy = [x] + [y] \end{cases}$$

R18. Să se determine intersecțiile intervalelor:

$$\text{a) } \left(\frac{b+5a}{6}, \frac{5b+a}{6}\right) \cap (a, b);$$

$$\text{b) } \left(\frac{3a+2b}{5}, \frac{3b+2a}{5}\right) \cap \left(\frac{5a+b}{6}, \frac{7a+2b}{9}\right);$$

$$\text{c) } \left[\frac{2-x}{2}, \frac{5-3x}{4}\right] \cap \left[-\frac{x}{3}, \frac{4-x}{2}\right].$$

R19. Fie  $n \in \mathbf{N}$ . Să se determine numerele întregi din intervalele:

$$\text{a) } \left[2 - \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}\right]; \text{ b) } \left[7 - \frac{1}{n}, 9 + \frac{1}{n}\right]; \text{ c) } \left[\frac{n}{2} + \frac{1}{n}, \frac{n+3}{2} - \frac{1}{n}\right].$$

R20. Să se demonstreze că:

$$\text{a) } \bigcup_{n=1} \left[1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right] = [0, 2];$$

$$\text{b) } \bigcup_{n=1} \left[1 + \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right] = (1, 3];$$

$$\text{c) } \bigcap_{n=1} \left[1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right] = \{1\};$$

$$\text{d) } \bigcap_{n=1} \left[1 - \frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n+1}\right] = (1, 3).$$

R21. Să se studieze valoarea de adevăr a propozițiilor.

a) „Suma oricăror două numere iraționale este număr irațional.”;

b) „Oricare număr natural este suma a două pătrate perfecte.”;

c) „Orice număr natural  $n \geq 12$  se poate scrie ca suma a două numere prime.”;

d) „Orice număr natural  $n \geq 5$  se poate scrie ca sumă de termeni egali cu 2 sau 3.”;

e) „Numărul 7 se poate scrie ca suma a trei pătrate perfecte.”;

f) „Orice număr natural  $n \geq 3$  se poate scrie ca suma a trei numere întregi cu modulele numere naturale consecutive.”.

R22. Să se determine dacă următoarele propoziții sunt tautologii:

$$\text{a) } p \leftrightarrow p \vee q; \quad \text{b) } p \leftrightarrow p \wedge q; \quad \text{c) } p \vee \neg(p \wedge q);$$

$$\text{d) } p \vee (\neg(p \wedge \neg p)); \quad \text{e) } (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q).$$

R23. Să se determine mulțimile:

$$\text{a) } A = \{x \in \mathbf{N} \mid x^2 + x \text{ este pătrat perfect}\};$$

$$\text{b) } B = \{x \in \mathbf{N} \mid x^2 + 6x \text{ este pătrat perfect}\};$$

$$\text{c) } C = \{x \in \mathbf{D} \mid |x - 11| \geq |x|\};$$

$$\text{d) } D = \left\{n \in \mathbf{N} \mid \frac{n^2 + 3n + 8}{n+1} \in \mathbf{N}\right\};$$

$$\text{e) } E = \left\{x \in \mathbf{D} \mid \left[\frac{x+5}{4}\right] = 2\right\};$$

$$\text{f) } F = \{(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid xy + 3x - 5y = 0\}.$$

R24. Să se arate că mulțimea  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  are două submulțimi cu suma elementelor egală.

R25. Fie  $n \in \mathbf{N}$  și  $A = \{1, 2, 3, \dots, 4n\}$ . Să se arate că există două submulțimi ale lui  $A$  care au aceeași sumă a elementelor.

R26. Să se arate că mulțimea numerelor naturale se poate scrie ca reuniunea a trei submulțimi ale sale care să fie infinite și disjuncte. Generalizare.

R27. Să se determine egalitățile:

$$\text{a) } 1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}, \quad n \geq 1;$$

$$\text{b) } 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4};$$

$$\text{c) } 1^3 + 3^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1);$$

$$\text{d) } 1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 4 + \dots + n^2(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12};$$

$$\text{e) } \frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)};$$

$$\text{f) } \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)};$$

$$\text{g) } \frac{3}{1 \cdot 3} + \frac{7 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{11 \cdot 3^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{(4n-1) \cdot 3^{n-1}}{n(n+2)} = \frac{(4n+5) \cdot 3^n}{2(n+1)(n+2)} - \frac{5}{4}.$$

R28. Se notează  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ . Să se demonstreze egalitățile:

$$\text{a) } 1! \cdot 1 + 2! \cdot 2 + 3! \cdot 3 + \dots + n! \cdot n = (n+1)! - 1;$$

$$\text{b) } \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!};$$

$$\text{c) } \frac{1}{0!+1!} + \frac{1}{1!+2!} + \dots + \frac{1}{n!+(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}, (0! = 1).$$

R29. Să se verifice egalitățile:

$$\text{a) } \left(1 - \frac{4}{1^2}\right) \left(1 - \frac{4}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{4}{(2n-1)^2}\right) = \frac{1+2n}{1-2n};$$

$$\text{b) } (1-a+a^2)(1-a^2+a^4) \dots (1-a^{2^{n-1}}+a^{2^n}) = \frac{1+a^{2^n}+a^{2^{n+1}}}{1+a+a^2};$$

$$\text{c) } (1+a)(1+a^2)(1+a^4) \dots (1+a^{2^{n-1}}) = \frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}.$$

R30. Să se demonstreze inegalitățile:

$$\text{a) } \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n}, n \geq 2;$$

$$\text{b) } \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}, n \geq 1;$$

$$\text{c) } \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{13} \dots \frac{4n-1}{4n+1} < \frac{1}{\sqrt{n}}, n \geq 1;$$

$$\text{d) } \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}, n \geq 1;$$

$$\text{e) } \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}, n \geq 1.$$

R31. Să se demonstreze folosind inducția matematică:

$$\text{a) } n^7 - n \text{ se divide cu } n, \forall n \in \mathbb{N};$$

$$\text{b) } 4^n + 15n - 1 : 9, n \in \mathbb{N};$$

$$\text{c) } 3^{2n+3} + 40n - 27 : 64, n \in \mathbb{N};$$

$$\text{d) } 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1 : 8, n \geq 1;$$

$$\text{e) } 16^{3n+1} + 48^{3n+1} + 1 : 13, n \geq 0;$$

$$\text{f) } 2^{3n} - 7n - 1 : 49, n \geq 1;$$

$$\text{g) } 7^{n+2} + 8^{2n+1} : 57, n \geq 0;$$

$$\text{h) } 3^{2n+2} - 8n - 9 : 64, n \geq 0;$$

$$\text{i) } 4^n + 15n + 8 : 9, n \geq 0;$$

$$\text{j) } 11^{n+2} + 12^{2n+1} : 133, n \geq 0;$$

$$\text{k) } 2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2} : 17, n \geq 0;$$

$$\text{l) } 5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1} : 23, n \geq 0.$$

R32. Fie  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Să se determine numărul de submulțimi ale lui  $A$ , care au suma elementelor 6.

R33. Să se determine numărul de elemente al mulțimii:  
 $\{\sqrt{1}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots, \sqrt{2n-1}\} \cap \mathbb{Q}$ .

R34. Să se determine cardinalul mulțimilor:

$$\text{a) } A = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2x + 3y = 83\};$$

$$\text{b) } A = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2xy + 3x + 5y = 45\}.$$

R35. Să se determine numărul funcțiilor de la mulțimea:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ divide } 6\} \text{ la mulțimea } B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x+1 \text{ divide } 4\}.$$

R36. Mulțimile  $A$  și  $B$  sunt finite, nevide și au număr finit de elemente. Să se afle câte elemente au aceste mulțimi știind că există același număr de funcții de la  $A$  la  $B$  și de la  $B$  la  $A$ .

R37. Să se determine în câte moduri se poate scrie numărul 11 ca sumă de termeni egali cu 1 sau 2.

R38. Cu cifrele 2, 3, 4, 5 se formează numere de patru cifre distincte. Câte dintre aceste numere sunt impare?

R39. Se consideră mulțimea  $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid |x-9| \leq 17\}$ .

Să se determine numărul elementelor lui  $A$  care nu se pot scrie ca sumă a două numere compuse nenule.

R40. Să se studieze mărșinirea și monotonia șirurilor de numere reale  $(a_n)$ ,  $n \geq 1$ :

$$\text{a) } a_n = \frac{n+x}{2n+1}, x \in \mathbb{R}; \quad \text{b) } a_n = \frac{nx+3}{2n-1}, x \in \mathbb{R}; \quad \text{c) } a_n = \frac{n+(-1)^n}{2n+(-1)^n};$$

$$\text{d) } a_n = \frac{2n+(-1)^n}{n^2+1}; \quad \text{e) } a_n = \frac{x+n}{x^2+n}, x \in \mathbb{R}; \quad \text{f) } a_n = \frac{n+x}{n^2+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

R41. Să se studieze monotonia și mărșinirea șirurilor  $(a_n)$ :

$$\text{a) } a_1 = 1, a_{n+1} = 2^x \cdot \frac{n}{n+1} \cdot a_n, x \in \mathbb{R}; \quad \text{b) } a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{n+x^2}{n+1} \cdot a_n, x \in \mathbb{R};$$

$$\text{c) } a_1 = 1, a_{n+1} = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cdot a_n, n \geq 1; \quad \text{d) } a_1 = 1, a_{n+1} = \left[ n + \frac{1+(-1)^n}{2} \right] \cdot \frac{1}{a_n}, n \geq 1.$$

**R42.** Să se determine laturile unui triunghi dreptunghic știind că sunt exprimate prin numere naturale în progresie aritmetică.

**R43.** Să se afle patru numere în progresie aritmetică știind că au suma 44, iar suma inverselor lor este egală cu  $\frac{219}{280}$ .

**R44.** Să se arate că într-o progresie aritmetică  $(a_n)$  au loc relațiile:

a)  $(n-p)a_m + (p-m)a_n + (m-n)a_p = 0$ ;

b)  $(n-p)S_m + (p-m)S_n + (m-n)S_p = \frac{1}{2}(n-m)(p-n)(m-p)r$ ;

c)  $\frac{n-p}{m}S_m + \frac{p-m}{n}S_n + \frac{m-n}{p}S_p = 0$ .

**R45.** Să se determine progresiile geometrice  $(a_n)$  în cazurile:

a)  $a_1 = 3, S_n = 765, q = 2$ ;

b)  $a_4 = 135, a_7 = 3645$ ;

c)  $a_5 = 512, a_7 = 8192$ .

**R46.** Fie  $(a_n)$  o progresie aritmetică. Să se determine  $n$  pentru care are loc relația  $S_{2n} = S_n + \frac{1}{3}S_{27}$ .

**R47.** Să se arate că  $(a_n)$  este progresie aritmetică dacă și numai dacă pentru oricare  $n \geq 2$  are loc egalitatea:

$$\frac{1}{a_1 a_n} + \frac{1}{a_2 a_{n-1}} + \dots + \frac{1}{a_n a_1} = \frac{2}{a_1 + a_n} \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right).$$

**R48.** Se dau progresiile aritmetice 1, 5, 9, 13, ... și 4, 15, 26, 37, ... . Să se arate că termenii comuni ai acestor progresii formează o progresie aritmetică.

**R49.** Fie  $a, b, c$  numere naturale relativ prime. Să se arate că dacă  $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$  sunt termeni ai aceleiași progresii aritmetice, atunci  $a, b, c$  sunt pătrate perfecte.

**R50.** Să se arate că dacă o progresie aritmetică de numere naturale conține un termen pătrat perfect ea conține o infinitate de termeni pătrate perfecte.

**R51.** Să se determine numerele  $x, y, z$  în progresie geometrică dacă:  
 $x + y + z = 63$  și  $x^2 + y^2 + z^2 = 2457$ .

**R52.** Dacă  $a, b, c, d$  sunt în progresie geometrică, să se arate că:  
 $(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2 = (a-d)^2$ .

**R53.** Să se determine  $a, b, c, d$  în progresie geometrică dacă:  
 $b = a + 4, d = c + 36$  și  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 3280$ .

**R54.** Să se afle numerele  $a, b, c, d, e$  în progresie geometrică dacă:  
 $a + b + c + d + e = 484$  și  $b + d = 120$ .

**R55.** Să se calculeze sumele:

a)  $S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n}$ ;

b)  $S_n = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots + \frac{a_n}{b_n}$ , unde  $(a_n)$  este progresie aritmetică, iar  $(b_n)$

o progresie geometrică.

**R56.** Să se arate că numerele  $x, y, z \in \mathbb{D}^*$  sunt în progresie geometrică dacă și numai dacă:

a)  $xyz(x^3 + y^3 + z^3) = x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3$ ;

b)  $xyz(x + y + z)^3 = (xy + yz + zx)^3$ .

**R57.** Să se determine funcția  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{D}$  dacă  $f(1) = 1, f(n+1) - f(n) = 2^n, n \geq 1$ .

**R58.** Fie  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{D}, f(n) = u(3^n)$ . Să se determine:

a)  $f(\{1, 2, 3\})$ ;

b)  $f(A)$ , unde  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ par}\}$ ;

c)  $f(B)$ , unde  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ impar}\}$ ;

d)  $f^{-1}(\{1\})$ ;

e)  $f^{-1}(\{3, 9\})$ .

**R59.** Fie  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = (-1)^n \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ .

Să se studieze dacă funcția  $f$  este:

a) mărginită; b) monotonă; c) periodică.

**R60.** Se consideră  $f_n: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ , dată de relația  $f_n(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor} \left\{ \frac{x}{n} \right\}, n \in \mathbb{N}^*$ . Să se

studieze dacă  $f_n$  este:

a) mărginită; b) periodică.

**R61.** Să se studieze mărghinirea și periodicitatea funcțiilor  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

a)  $f(x) = (-1)^{\lfloor \frac{x+1}{n} \rfloor}, n \in \mathbb{N}^*$ ;

b)  $f(x) = \left\{ x + \frac{1}{n} \right\}, n \in \mathbb{N}^*$ ;

c)  $f(x) = \left\{ x + \frac{1}{2} \right\} + \left\{ x + \frac{1}{3} \right\} + \dots + \left\{ x + \frac{1}{n} \right\}, n \in \mathbb{N}^*$ ;

d)  $f(x) = (-1)^{\lfloor \frac{x+1}{n} \rfloor + \lfloor \frac{x+2}{n} \rfloor}$ ;

e)  $f(x) = \left\{ \frac{x}{n} + \frac{1}{n+1} \right\}, n \in \mathbb{N}^*$ .

**R62.** Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Să se determine  $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n$  dacă:

a)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ;

b)  $f(x) = 3x - 2$ ;

c)  $f(x) = x + 3[x]$ ;

d)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ x, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ ;

e)  $f(x) = (-1)^{[x]}$ ;

f)  $f(x) = (-1)^{[nx]}, n \in \mathbb{N}^*$ .

**R63.** Să se calculeze  $f \circ f$  în cazul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

a)  $f(x) = (-1)^{[x]} \{x\}$ ;

b)  $f(x) = (-1)^{[x]} x$ .

**R64.** Să se determine  $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n$  pentru funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

a)  $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{2x^2 + 1}$ ;

b)  $f(x) = \frac{x^3 + 3x}{3x^2 + 1}$ ;

c)  $f(x) = \frac{17x^2 + 16x - 2}{18x^2 - 6x + 13}$ ;

d)  $f(x) = 2x\sqrt{1+x^2}$ .

**R65.** Să se rezolve și să se discute ecuațiile după  $m, n \in \mathbb{R}$ :

a)  $2(m-3)x - m(x+m) = m - 7x$ ;

b)  $3(m+x) - m(x+2) = (1+m)x + 1$ ;

c)  $m(mx-1) = 3(3x+1)$ ;

d)  $(x+m)^2 - (x-n)^2 = m+n$ ;

e)  $(m^2 - 2m)x - m - 2 = 0$ .

**R66.** Să se rezolve și să se discute ecuațiile în funcție de parametrii reale  $a, b, c$ :

a)  $\frac{x}{a-b} + \frac{x}{a+b} = \frac{ab}{a^2 - b^2}$ ;

b)  $(x+2a)(x+b)^2 = (x+2b)(x+a)^2$ ;

c)  $\frac{a+x}{a+b} - \frac{b-x}{a-b} = \frac{2b(a+x)}{a^2 - b^2}$ ;

d)  $\frac{ax}{(a-b)(a-c)} + \frac{bx}{(b-c)(b-a)} + \frac{cx}{(c-a)(c-b)} = 1$ ;

e)  $\frac{x}{a}(3ab+1) = \frac{3ab}{1+a} + \frac{x(2a+1)}{a(a+1)^2} + \frac{a^2}{(a+1)^3}$ .

**R67.** Să se reprezinte graficul funcțiilor  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

a)  $f(x) = (m^2 - 2m)x + 6 - 3m$  știind că trece prin punctul  $A(1, 0)$ ;

b)  $f(x) = (a+b)x + 3a^2 - b^2$  știind că trece prin punctele  $A(1, 3), B(-1, -1)$ .

**R68.** Să se determine parametrii reali pentru care funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sunt monotone pe  $\mathbb{R}$ :

a)  $f(x) = \begin{cases} 2x+a, & x \leq -1 \\ 3x+2, & x > -1 \end{cases}$ ;

b)  $f(x) = \begin{cases} ax+2, & x \leq 1 \\ 2x+a^2, & x > 1 \end{cases}$ ;

c)  $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 1 \\ -2ax+a+1, & x \in (1, 2) \\ 3x+2, & x \geq 2 \end{cases}$ .

**R69.** Să se determine funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$  în cazurile:

a)  $f(f(x)) \geq f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$ ;

b)  $f(f(x)) \leq f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$ .

**R70.** Să se rezolve:

a)  $\frac{3-x}{2} + \frac{5-2x}{3} \geq \frac{x}{4}$ ; b)  $\frac{x-1}{3} + \frac{3x-5}{4} \geq \frac{7-2x}{6}$ ;

c)  $\frac{3x-2}{x-2} \geq \frac{3x-1}{x+1}$ ; d)  $\frac{x+2}{2x-1} \geq \frac{3x+5}{6x-1}$ ;

e)  $\frac{x-a}{x+1} \geq \frac{2x-1}{2x+3}, a \in \mathbb{R}$ .

**R71.** Să se rezolve inecuațiile:

a)  $|x-1| \leq x-2$ ;      b)  $|x-1| \geq x-2$ ;      c)  $2|x+2| \geq 3|x-1|$ ;  
 d)  $\frac{x-1}{x+1} \leq 1$ ;      e)  $\frac{x-1}{2x+1} \geq 1$ ;      f)  $|x+1| \leq x+|x-1|$ .

**R72.** Să se discute în funcție de valorile parametrului real  $m$ , sistemele de ecuații:

a)  $\begin{cases} x+my = m+1 \\ mx+y = m^2+1 \end{cases}$ ;      b)  $\begin{cases} 2mx+y = 1 \\ (m+1)x+2y = 2 \end{cases}$ ;      c)  $\begin{cases} (m^2-1)x+y = m \\ x+3y = m+1 \end{cases}$

**R73.** Să se reprezinte grafic funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

a)  $f(x) = mx^2 - 3(m+1)x + 1$ , dacă graficul conține punctul  $A(1, 0)$ ;  
 b)  $f(x) = (m+1)x^2 - 3(m^2+m)x + 15$ , dacă graficul conține punctul  $A(2, -9)$ ;  
 c)  $f(x) = (a+1)x^2 + 2(2a+3b)x + a^2 - 13$ , știind că graficul trece prin punctele  $A(1, 0)$ ,  $B(2, 16)$ .

**R74.** Să se reprezinte grafic funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

a)  $f(x) = \begin{cases} x^2+3x+2, & x \leq 0 \\ -x^2+x+6, & x > 0 \end{cases}$ ;      b)  $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \leq 1 \\ 6-x^2, & x > 1 \end{cases}$ ;  
 c)  $f(x) = x|x-1|$ ;      d)  $f(x) = (x-2)|x+3|$ ;  
 e)  $f(x) = x^2 - 3|x| + 2$ ;      f)  $f(x) = 2x^2 - |x-1| - 2$ ;  
 g)  $f(x) = \begin{cases} |x^2-4|, & x \leq 2 \\ |x-3|, & x > 2 \end{cases}$ ;      h)  $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ .

**R75.** Fie  $f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_m(x) = (m+1)x^2 + (2m+3)x + m + 4$ ,  $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

Să se arate că:

- a) vârfurile parabolilor asociate funcțiilor  $f_m$  sunt coliniare;  
 b) parabolile au un punct comun.

**R76.** Se consideră funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + ax + b$ ,  $g(x) = x^2 + bx + a$ .

- a) Dacă  $a+b+1 < 0$  să se determine poziția axei  $Ox$  în raport cu cele două parabole.  
 b) Să se studieze poziția parabolilor asociate funcțiilor  $f$  și  $g$ .

**R77.** Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  pentru care funcția:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^2 + mx - 2, & x \leq m \\ -x^2 + mx - 2, & x > m \end{cases}$  este funcție monotonă pe  $\mathbb{R}$ .

**R78.** Să se studieze monotonia funcției:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \min(x^2 + ax + b, cx + d)$  știind că  $f(-2) = f(-1) = 1$ ,  $f(0) = 2$  și  $f(1) = 4$ .

**R79.** Să se rezolve inecuațiile:

a)  $\frac{x^2-3x}{x-1} \geq 0$ ;      b)  $\frac{x^2-3x-4}{x^2-9} \leq 0$ ;  
 c)  $\frac{x(x^2+3x-4)}{(x+1)(x-2)} \geq 0$ ;      d)  $\frac{x-1}{x+1} \geq \frac{2x-3}{x+2}$ ;  
 e)  $16x^4 - 17x^2 + 1 \leq 0$ ;      f)  $\frac{x^4-16}{x^4-17x^2+16} \geq 0$ .

**R80.** Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & x \leq 3 \\ -x^2 + 5, & x \in (3, 5) \\ x^2 + 2x, & x \geq 5 \end{cases}$ .

Să se rezolve inecuațiile:

a)  $f(x) \leq 2$ ;      b)  $f(x-1) \geq 5$ .

**R81.** Să se determine  $\text{Im } f$  pentru funcțiile  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ :

a)  $f(x) = \frac{1}{x^2-x+1}$ ;      b)  $f(x) = \frac{x}{x^2-2x+2}$ ;      c)  $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$ ;  
 d)  $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ ;      e)  $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2-x+1}$ ;      f)  $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{(x-3)^2}$ .

**R82.** Să se rezolve sistemele de ecuații:

a)  $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ x^2y + y^2x = 2 \end{cases}$ ;      b)  $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = 3 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2 \end{cases}$ ;      c)  $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 4 \\ xy + (x+y)^2 = 5 \end{cases}$

**R83.** Să se rezolve în mulțimea  $\mathbb{R}$  sistemele:

a)  $\begin{cases} x+y+z = 1 \\ 2xy-z^2 = 1 \end{cases}$ ;      b)  $\begin{cases} 3x+y+2z = 1 \\ 6xy-4z^2 = 1 \end{cases}$

# ELEMENTE DE GEOMETRIE

## I. VECTORI ÎN PLAN

### 1 SEGMENTE ORIENTATE RELAȚIA DE ECHIPOLENȚĂ

□1. Se consideră dreptunghiul ABCD (figura 1).

a) Să se precizeze câte direcții determină dreptele care conțin câte două vârfuri ale dreptunghiului.

b) Să se precizeze semidreptele determinate de vârfurile dreptunghiului care au același sens și care au sensuri opuse.

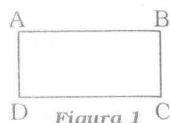


Figura 1 C

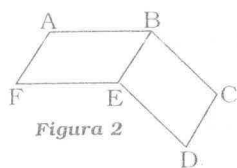


Figura 2

□2. Se consideră punctele A, B, C, D, E, F astfel încât patrulateralele ABEF și BCDE sunt paralelograme (figura 2).

a) Să se scrie dreptele determinate de punctele date care au aceeași direcție.

b) Să se scrie semidreptele determinate de punctele date care au același sens și care au sensuri opuse.

□3. Fie ABCDEF un hexagon regulat și punctul O centrul său (figura 3).

a) Să se scrie semidreptele determinate de vârfurile hexagonului care au același sens respectiv cu semidreptele (EF și (BD).

b) Să se scrie perechile de semidrepte determinate de punctele A, B, C, D, E, F, O care au același sens și care au sensuri opuse.

c) Să se scrie semidreptele care au același sens cu semidreapta (OA).

d) Să se scrie semidreptele care au sens contrar sensului semidreptei (DO).

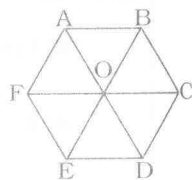


Figura 3

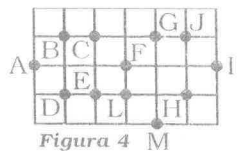


Figura 4 M

□4. Se consideră rețeaua de pătrate din desenul alăturat (figura 4).

a) Să se precizeze segmentele orientate echipolente cu segmentele orientate  $\overrightarrow{AB}$ , respectiv  $\overrightarrow{CF}$ .

b) Să se precizeze segmentele orientate care sunt reprezentanți ai aceluiași vector liber.

□5. Se consideră hexagonul regulat ABCDEF, punctul O centrul său, iar M, N, P, Q, R, S mijloacele laturilor (figura 5).

a) Să se scrie segmentele orientate care au același sens cu vectorul  $\overrightarrow{OA}$ .

b) Să se scrie mulțimea segmentelor orientate echipolente cu  $\overrightarrow{MN}$ .

c) Să se scrie mulțimea vectorilor opuși vectorului  $\overrightarrow{OM}$ .

d) Dacă  $\vec{v}$  este un vector liber care are ca reprezentant vectorul  $\overrightarrow{BC}$ , să se scrie ceilalți reprezentanți ai vectorului  $\vec{v}$ .

e) Să se scrie mulțimea segmentelor orientate coliniare cu segmentul orientat  $\overrightarrow{OC}$ .

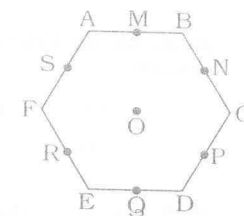


Figura 5

□6. Fie ABCD un pătrat și punctele M, N, P, Q astfel încât segmentele orientate  $\overrightarrow{AM}$ ,  $\overrightarrow{BN}$ ,  $\overrightarrow{CP}$ ,  $\overrightarrow{DQ}$  sunt respectiv echipolente cu segmentele orientate  $\overrightarrow{CB}$ ,  $\overrightarrow{DC}$ ,  $\overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{BA}$ .

a) Să se arate că segmentele orientate  $\overrightarrow{MN}$  și  $\overrightarrow{QP}$  sunt echipolente.

b) Să se arate că patrulaterul MNPQ este un pătrat.

### 2 OPERAȚII CU VECTORI

#### 2.1. SUMA ȘI DIFERENȚA VECTORILOR

□1. Fie ABC un triunghi în plan. Să se exprime sumele:

a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ ; b)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$ ; c)  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$ ; d)  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$ .

□2. Se consideră paralelogramul ABCD și O centrul acestuia. Să se exprime sumele:

a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ ; b)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ ; c)  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AO}$ ; d)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ ; e)  $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ ;

f)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OC}$ ; g)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD}$ ; h)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD}$ ; i)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD}$ .

□3. Se consideră punctele A, B, C, D, E ca în desenul alăturat (figura 6).

Să se reprezinte în fiecare caz vectorul sumă:

a)  $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED}$ ; b)  $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CE}$ ; c)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EA}$ ;

d)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ ; e)  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EC}$ ; f)  $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{AD}$ .

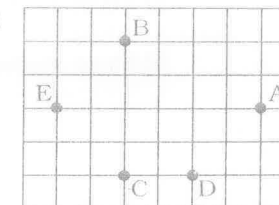


Figura 6

□ 4. Se consideră punctele A, B, C, D, E, F ca în desenul alăturat (figura 7).

Să se exprime vectorul rezultatant în cazurile:

- a)  $\overline{AB} + \overline{BC}$ ; b)  $\overline{DC} + \overline{EF}$ ; c)  $\overline{CD} + \overline{CE}$ ;  
d)  $\overline{BA} + \overline{BC}$ ; e)  $\overline{DE} + \overline{CE}$ .

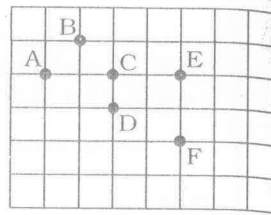


Figura 7

□ 5. Fie ABCD un patrulater în plan. Să se demonstreze că:

- a)  $\overline{AB} + \overline{DC} = \overline{AC} + \overline{DB}$ ;  
b)  $\overline{AC} + \overline{BD} = \overline{AD} + \overline{BC}$ .

□ 6. Să se arate că dacă  $\overline{AB} + \overline{CD} = \vec{0}$ , atunci  $\overline{BA} = \overline{CD}$ .

□ 7. Fie ABC un triunghi și M mijlocul segmentului [BC]. Să se exprime sumele:

- a)  $\overline{AB} + \overline{BM}$ ; b)  $\overline{AB} + \overline{MC}$ ; c)  $\overline{AB} + \overline{CM}$ ;  
d)  $\overline{AC} + \overline{BM}$ ; e)  $\overline{AM} + \overline{CM}$ .

□ 8. Fie M un punct oarecare pe latura [BC] a triunghiului ABC.

a) Să se arate că expresia  $\overline{AM} + \overline{BC} - \overline{BM}$  nu depinde de poziția punctului M.

b) Rămâne adevărată afirmația dacă punctul M este un punct oarecare din plan?

□ 9. Suma a doi vectori de module diferite poate fi vectorul nul? Dar suma a trei vectori?

□ 10. Fie A, B, C, D puncte distincte în plan. Să se arate că:

- a)  $\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AC} + \overline{BD}$ ;  
b)  $\overline{AB} - \overline{CB} = \overline{DC} - \overline{DA}$ .

□ 11. Fie ABC un triunghi astfel încât  $|\overline{AB}| = 4$ ,  $|\overline{AC}| = 4$ . Să se determine modulul vectorului  $\overline{AB} + \overline{AC}$  în cazurile:

- a)  $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$ ; b)  $m(\widehat{BAC}) = 60^\circ$ ; c)  $m(\widehat{BAC}) = 120^\circ$ .

□ 12. Dacă  $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AD} - \overline{CD}$ , patrulaterul ABCD este paralelogram?

□ 13. Se consideră paralelogramul ABCD și punctul O centrul său. Să se precizeze perechile de vectori opuși.

□ 14. Se consideră paralelogramul ABCD și fie O centrul său.

a) Să se determine punctul M, astfel încât  $\overline{OM} = \overline{AB} + \overline{AD}$ .

b) Să se demonstreze egalitățile  $\overline{CM} = \overline{CO} + \overline{OM} = \overline{CO} + \overline{AC} = \overline{AO} = \overline{OC}$ .

□ 15. Fie A și B două puncte distincte, iar punctul O astfel încât  $\overline{OA} + \overline{OB} = \vec{0}$ . Ce reprezintă punctul O pentru segmentul [AB]?

□ 16. Se consideră triunghiul ABC. Să se determine punctele D, E, F, G astfel încât:

- a)  $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AD}$ ; b)  $\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{AE}$ ;  
c)  $\overline{CB} - \overline{AB} = \overline{AF}$ ; d)  $\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{AG}$ .

□ 17. Se consideră patrulaterul convex ABCD și  $\{O\} = AC \cap BD$ .

Dacă  $\overline{OA} + \overline{OC} = \vec{0}$  și  $\overline{OB} + \overline{OD} = \vec{0}$ , ce fel de patrulater este ABCD?

□ 18. Patrulaterul ABCD este paralelogram. Dacă  $\vec{a} = \overline{AB}$  și  $\vec{b} = \overline{AD}$ , să se exprime în funcție de  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  vectorii  $\overline{BA}$ ,  $\overline{CB}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{DB}$ ,  $\overline{BD}$ ,  $\overline{CA}$ .

□ 19. Se consideră paralelogramul MNPQ și  $\{O\} = MP \cap NQ$ ,  $A \in NP$ , astfel încât  $\overline{AN} = -\overline{AP}$ . Să se exprime vectorul  $\overline{MA}$  cu ajutorul vectorilor  $\overline{MN}$  și  $\overline{MO}$ .

□ 20. Vectorii  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$ ,  $\overline{OC}$  au module egale și suma lor este vectorul nul. Ce formează punctele A, B, C?

□ 21. Vectorii  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$ ,  $\overline{OC}$ ,  $\overline{OD}$  au același modul și suma lor este vectorul nul. Ce formează punctele A, B, C, D?

□ 22. Punctele O, A, B sunt situate în planul  $\mathcal{P}$ . Să se afle punctul  $C \in \mathcal{P}$  astfel încât  $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \vec{0}$ .

□ 23. Se consideră punctele O, A, B, C. Să se determine punctul D astfel încât  $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = \vec{0}$ .

□ 24. Fie ABC un triunghi.

a) Să se construiască punctele E și F astfel încât  $\overline{EA} = \overline{CA} + \overline{BA}$  și  $\overline{AF} = \overline{AB} - \overline{AC}$ .

b) Să se arate că punctele B, E, F sunt coliniare și că punctul B este mijlocul segmentului [EF].

□ 25. Fie  $d$  și  $d'$  două drepte concurente în punctul  $O$  și  $A$  un punct oarecare în planul  $(d, d')$ . Să se determine punctele  $B \in d$  și  $B_1 \in d'$  astfel încât  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB_1}$ .

□ 26. Se consideră triunghiul  $ABC$  și punctele  $B_1$  și  $C_1$  simetricele punctelor  $B$  și  $C$  în raport cu  $A$ . Dacă  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ , să se exprime:

a) vectorii  $\overrightarrow{B_1A}$ ,  $\overrightarrow{AC_1}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{B_1C_1}$ ;

b) sumele  $\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AB}$ ;  $\overrightarrow{C_1A} + \overrightarrow{CA}$ ;  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{B_1C_1}$ ;  $\overrightarrow{C_1B} + \overrightarrow{CB_1}$ .

□ 27. Dacă  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$ , pot fi distincte punctele  $A, B, C, D, E, F$ ?

□ 28. Se consideră triunghiul  $ABC$ .

a) Să se construiască punctul  $D$  astfel încât  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ .

b) Punctele  $B_1$  și  $C_1$  sunt mijloacele segmentelor  $[AC]$  și  $[AB]$ . Să se construiască punctul  $E$  astfel încât  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AC_1}$ .

□ 29. Punctele  $A$  și  $B$  sunt distincte, iar punctul  $M$  este mijlocul segmentului  $[AB]$ . Să se demonstreze că pentru oricare punct  $O$  există egalitatea  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM}$ .

□ 30. Se consideră paralelogramul  $ABCD$ . Să se demonstreze că oricare ar fi punctul  $M$  există egalitatea  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$ .

□ 31. Se consideră triunghiul  $ABC$  și punctele  $A_1, B_1, C_1$  mijloacele laturilor  $[BC], [CA], [AB]$ . Să se demonstreze că pentru oricare punct  $O$  are loc relația  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}$ .

□ 32. Se consideră punctele  $A, B, C, D$  coliniare și  $M$  un punct oarecare în plan. Să se demonstreze că dacă  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ , atunci segmentele  $[AB]$  și  $[CD]$  au același mijloc.

□ 33. În triunghiul  $ABC$  punctele  $D, E, F$  sunt mijloacele segmentelor  $[BC], [AC], [AB]$ . Să se calculeze:

a)  $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BF}$ ;      b)  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}$ .

□ 34. Se consideră punctele  $A, B, C$  și  $I, J$  mijloacele segmentelor  $[AB]$  și  $[AC]$ . Să se demonstreze că  $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$ .

□ 35. Se consideră paralelogramul  $ABCD$ , punctele  $E$  și  $F$  mijloacele laturilor  $[AB]$  și  $[CD]$  și  $\{I\} = BD \cap CE$ ,  $\{J\} = [BD] \cap [AF]$ .

Să se demonstreze că  $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{JD}$ .

□ 36. Dacă punctele  $M$  și  $N$  sunt mijloacele segmentelor  $[AB]$  și  $[CD]$ , să se demonstreze că:

a)  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MN}$ ;

b)  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$ .

□ 37. Patrulaterul  $ABCD$  este paralelogram. Să se exprime vectorul  $\overrightarrow{OD}$  în funcție de vectorii  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ , unde  $O$  este un punct oarecare în planul paralelogramului.

□ 38. Se consideră paralelogramul  $ABCD$  și  $M$  un punct oarecare în interiorul său. O dreaptă  $d$ , paralelă cu  $AD$ , intersectează dreptele  $AB$  și  $CD$  în punctele  $E$ , respectiv  $F$ . Dreapta  $d_1$  paralelă cu  $AB$  intersectează dreptele  $AD$  și  $BC$  în  $G$ , respectiv  $H$ . Să se arate că  $\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC}$ .

□ 39. Simetricele unui punct  $M$  din planul patrulaterului  $ABCD$  față de mijloacele laturilor  $[AB], [BC], [CD], [DA]$  se notează cu  $P, Q, R, S$ .

a) Să se arate că  $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ .

b) Să se arate că  $PQRS$  este paralelogram.

□ 40. Vectorii  $\overrightarrow{OA}$  și  $\overrightarrow{OB}$  au același modul, punctele  $A, O$  și  $B$  nefiind coliniare. Să se arate că dacă  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ , semidreapta  $[OC]$  este bisectoarea unghiului  $\widehat{AOB}$ .

□ 41. Se consideră paralelogramul  $ABCD$ . Să se demonstreze că există un singur punct  $O$  în interiorul paralelogramului astfel încât  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ .

□ 42. Se consideră vectorii  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  ca în figura alăturată (figura 8). Rezultă că  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ ?

□ 43. Fie  $O$  centrul paralelogramului  $ABCD$ . Să se arate că:

a)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ ;

b) pentru oricare punct  $M$  există egalitatea:  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$ .

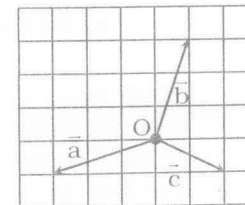


Figura 8

□ 44. Să se arate că:

a)  $|\overline{AC}| \leq |\overline{AB}| + |\overline{BC}|$  pentru oricare puncte A, B, C;

b)  $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$  pentru oricare vectori  $\vec{a}, \vec{b}$ .

□ 45. Cum sunt vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  dacă  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$  și  $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{c}|$ ?

□ 46. Se consideră patrulaterul ABCD. Dreptele care unesc mijloacele laturilor opuse ale patrulaterului se intersectează în punctul M. Să se demonstreze că pentru oricare punct O există egalitatea  $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = 4\overline{OM}$ .

□ 47. În dreptunghiul ABCD se notează cu M, N, P, Q mijloacele segmentelor  $[AB], [BC], [CD], [DA]$ . Se prelungesc segmentele  $[MN]$  și  $[QP]$  cu segmentele  $[NS] \equiv [MN]$  și  $[QL] \equiv [QP]$ . Să se demonstreze că punctele S, L și punctul de intersecție a diagonalelor sunt coliniare.

□ 48. Coardele  $[AB]$  și  $[CD]$  ale cercului  $\mathcal{C}(O, R)$  se intersectează în punctul P și sunt perpendiculare. Să se arate că  $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD} = 2\overline{PO}$ .

□ 49. Vectorii  $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$  de modul 1 sunt în același semiplan delimitat de o dreaptă care trece prin punctul O. Să se arate că  $|\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}| \geq 1$ .

□ 50. Se consideră segmentele  $[AB], [CD], [EF]$  neparalele, astfel încât  $\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF} = \vec{0}$ . Să se arate că există un triunghi care are laturile congruente, respectiv paralele cu cele trei segmente date.

TESTE DE VERIFICARE

Testul nr. 1

- O 1. Să se precizeze valoarea de adevăr a propozițiilor:
- a) „Dacă  $\overline{AB} = \overline{CD}$ , atunci  $\overline{AC} = \overline{BD}$ .“;
- b) „Dacă  $\overline{CA} = \overline{CB}$ , atunci  $A = B$ .“;
- c) „Dacă punctul C este egal depărtat de punctele A și B, atunci  $\overline{CA} = \overline{CB}$ .“;
- d) „Dacă  $\overline{AB} = \overline{DC}$ , atunci punctele A, B, C, D sunt coliniare.“.
- O 2. Se consideră patrulaterul ABCD și fie  $\vec{a} = \overline{AB}, \vec{b} = \overline{DC}$ . Să se exprime în funcție de  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ , relațiile:
- a)  $\overline{AD} + \overline{CB}$ ;                      b)  $\overline{AD} - \overline{CA}$ ;                      c)  $\overline{AC} + \overline{BD}$ .
- O 3. Fie ABC un triunghi. Să se determine punctele D și E astfel încât:
- a)  $\overline{AD} = \overline{AC} - \overline{AB}$ ;                      b)  $\overline{AE} = \overline{AB} - \overline{AC}$ .
- Cum sunt așezate punctele A, D și E?

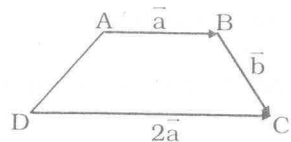
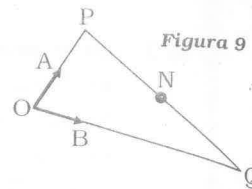
Testul 2

- O 1. Se consideră hexagonul regulat ABCDEF. Să se exprime în funcție de  $\vec{a} = \overline{AB}$  și  $\vec{b} = \overline{BC}$  vectorii  $\overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AE}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}, \overline{FA}$ .
- O 2. Se consideră triunghiul ABC.
- a) Să se construiască punctul D pentru care  $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} = \vec{0}$ .
- b) Să se construiască punctul E astfel încât  $\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{AD}$ .
- c) Să se demonstreze că punctele C și E sunt simetrice în raport cu punctul A.
- O 3. Se consideră vectorii  $\vec{a} = \overline{AB}, \vec{b} = \overline{BC}, \vec{c} = \overline{CD}$  astfel încât  $AB = 14, BC = 4, CD = 6, AB \perp BC$  și  $BC \perp CD$ . Să se afle modulul vectorului  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$  în cazurile:
- a)  $\overline{AB}$  și  $\overline{DC}$  au același sens;
- b)  $\overline{AB}$  și  $\overline{DC}$  au sensuri opuse.

### 2.2. ÎNMULȚIREA CU SCALARI A VECTORILOR

51. Se consideră punctele O, A, B, P, N, Q astfel încât  $OA = AP$ ,  $BQ = 3OB$  și N mijlocul segmentului [PQ] (figura 9).

Dacă  $\vec{OA} = \vec{a}$  și  $\vec{OB} = \vec{b}$ , să se scrie folosind vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  vectorii  $\vec{AP}$ ,  $\vec{AB}$ ,  $\vec{OQ}$ ,  $\vec{PO}$ ,  $\vec{PQ}$ ,  $\vec{PN}$ ,  $\vec{ON}$ ,  $\vec{AN}$ .

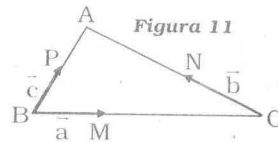


52. Se consideră punctele A, B, C, D ca în figura alăturată.

- a) Ce patrulater este ABCD?
- b) Să se exprime în funcție de  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  vectorii  $\vec{AC}$ ,  $\vec{DB}$ ,  $\vec{AD}$ ,  $\vec{CA} + \vec{BD}$ .

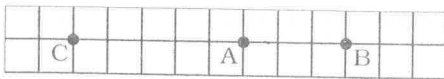
53. Se consideră punctele A, B, C, M, N, P astfel încât  $BC = \frac{7}{3}BM$ ,  $CN = \frac{1}{2}AC$  și  $BP = \frac{3}{4}AB$  (figura 11).

Să se exprime în funcție de vectorii  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  vectorii  $\vec{AB}$ ,  $\vec{CB}$ ,  $\vec{AC}$ ,  $\vec{AM}$ ,  $\vec{BN}$ ,  $\vec{CP}$ .



54. Fie ABCDEF un hexagon regulat și  $\vec{a} = \vec{AB}$ ,  $\vec{b} = \vec{AF}$ . Să se exprime în funcție de  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  vectorii  $\vec{AD}$ ,  $\vec{AC}$ ,  $\vec{AE}$ .

55. Se consideră hexagonul regulat ABCDEF și O centrul său. Să se exprime în funcție de  $\vec{a} = \vec{FA}$ ,  $\vec{b} = \vec{FB}$  vectorii  $\vec{AB}$ ,  $\vec{FO}$ ,  $\vec{FC}$ ,  $\vec{BC}$ ,  $\vec{AO}$ ,  $\vec{FD}$ .



56. Se consideră punctele A, B, C ca în figura alăturată (figura 12).

Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) „ $5\vec{AB} + 3\vec{AC} = \vec{0}$ ”;
- b) „Dacă  $\vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$ , atunci  $\vec{AM} = \frac{1}{8}\vec{BC}$ ”;
- c) „Punctul M care verifică relația  $\vec{AM} = 1995\vec{AC} + 2000\vec{AB}$  aparține lui [BC].”.

57. Se consideră vectorul  $\vec{a} = \vec{AB}$ . Să se determine vectorul  $\vec{v}$  în cazurile:

- a)  $\vec{v} = \frac{2}{3}\vec{a}$ ;
- b)  $\vec{v} = -\frac{5}{3}\vec{a}$ ;
- c)  $\vec{v} = -\frac{3}{2}\vec{a}$ .

58. Dacă  $\vec{AB} = \vec{u}$ ,  $\vec{AC} = \vec{v}$ , să se scrie cât mai simplu:

- a)  $-\vec{u} + \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$ ;
- b)  $-\frac{1}{3}(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{2}{3}(\vec{u} + \vec{v})$ ;
- c)  $2\vec{u} - 3\vec{BC}$ ;
- d)  $2\vec{u} + (\vec{v} + \vec{u}) - \frac{1}{2}(\vec{v} - \vec{u})$ ;
- e)  $5(2\vec{u} + \vec{v}) - 3(5\vec{u} - 3\vec{v})$ ;
- f)  $2\vec{u} + 3\vec{CA} - 2\vec{BA} + \vec{BC}$ .

59. Punctele A și B sunt distincte. Să se afle  $\vec{AM}$  și  $\vec{MB}$ , în funcție de  $\vec{a} = \vec{AB}$ , dacă:

- a)  $M \in [AB]$  și  $\vec{MA} = \frac{2}{3}\vec{BA}$ ;
- b)  $M \in [AB]$  și  $2\vec{AM} = 5\vec{AB}$ ;
- c) M este astfel încât  $3\vec{BA} = \vec{AM}$ ;
- d) M este simetricul lui B în raport cu A.

60. Fie vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ .

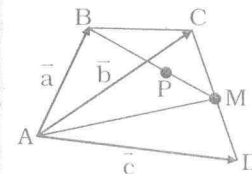
Să se construiască în două moduri vectorul  $\vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ .

61. Folosind proprietățile înmulțirii cu scalari, să se verifice egalitățile:

- a)  $\alpha(\vec{a} - \vec{b}) = \alpha\vec{a} - \alpha\vec{b}$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{V}$ ;
- b)  $(\alpha - \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} - \beta\vec{a}$ ,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\forall \vec{a} \in \mathcal{V}$ ;
- c)  $\alpha(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} + \alpha\vec{c}$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathcal{V}$ .

62. Se consideră paralelogramul ABCD cu centrul O. Să se determine  $x \in \mathbb{R}$  știind că:

- a)  $\vec{AB} = x \cdot \vec{CD}$ ;
- b)  $\vec{AC} = x \cdot \vec{OA}$ ;
- c)  $\vec{OC} = x \cdot \vec{CA}$ .



63. Fie ABCD un patrulater convex și punctele M, P astfel încât  $BP = 2PM$  și  $CD = 2MD$  (figura 13). Să se exprime în funcție de  $\vec{a} = \vec{AB}$ ,  $\vec{b} = \vec{AC}$ ,  $\vec{c} = \vec{AD}$  vectorii  $\vec{DC}$ ,  $\vec{DM}$ ,  $\vec{AM}$ ,  $\vec{BM}$ ,  $\vec{BP}$ ,  $\vec{AP}$ .

Figura 13

64. Se consideră triunghiul ABC. Să se determine punctele I, J, K, L, M astfel încât:

- a)  $\vec{AI} = -2\vec{BC}$ ;
- b)  $\vec{AJ} = \frac{1}{2}\vec{BC}$ ;
- c)  $\vec{BK} = \frac{2}{3}\vec{AC}$ ;
- d)  $\vec{BL} = -2\vec{CA}$ ;
- e)  $\vec{CM} = -3\vec{AB}$ ;
- f)  $\vec{NC} = 2\vec{AB}$ .

□ 65. Se consideră punctele A și B. Să se construiască punctul M în cazurile:

a)  $\overline{MA} = 2\overline{AB}$ ; b)  $\overline{MB} + 3\overline{AB} = \vec{0}$ .

□ 66. Se consideră vectorii  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  ca în figura 14 și punctul M, astfel încât  $\overline{OM} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ . Punctul M aparține dreptei d?

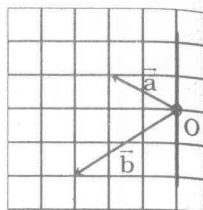


Figura 14

□ 67. Să se stabilească valoarea de adevăr pentru afirmațiile:

a) Doi vectori coliniari și de același modul sunt egali sau opuși.

b) Dacă ABC este un triunghi și punctul M astfel încât vectorii  $\overline{AM}$  și  $\overline{AB} + \overline{AC}$  sunt coliniari, atunci M este pe mediana din A a triunghiului ABC.

□ 68. Fie ABC un triunghi și punctele I, J, K astfel încât  $a\overline{AI} = b\overline{AB}$ ,  $a\overline{AJ} = b\overline{AC}$ ,  $a\overline{CK} = b\overline{CB}$ . Pentru ce valori a, b ∈ ℝ\* triunghiurile ABC și IJK au laturile paralele.

□ 69. Se consideră triunghiul ABC și punctele P, Q, R astfel încât  $P \in (AB)$ ,  $Q \in (AC)$ ,  $R \in BC$  și  $\overline{AP} = \frac{2}{3}\overline{AB}$ ,  $\overline{AQ} = \frac{1}{3}\overline{AC}$ ,  $BR = \frac{1}{3}BC$ , punctele R și C fiind de o parte și de alta a punctului B. Să se exprime vectorii  $\overline{PQ}$  și  $\overline{PR}$  în funcție de vectorii  $\overline{AB}$  și  $\overline{AC}$ . Să se precizeze poziția punctelor P, Q, R.

□ 70. Fie ABC un triunghi și punctele P și Q astfel încât  $P \in (AB)$ ,  $\overline{BP} = \frac{2}{3}\overline{BA}$ , iar Q este simetricul mijlocului segmentului [AC] în raport cu C. Să se exprime vectorul  $\overline{PQ}$  în funcție de vectorii  $\overline{AB}$  și  $\overline{AC}$ .

□ 71. Stabiliți valoarea de adevăr a afirmațiilor:

a) Dacă  $\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{CB} - \overline{CD}$ , atunci patrulaterul ABCD este paralelogram.

b) Dacă triunghiul ABC este isoscel cu  $AB = AC$ , atunci  $\overline{AB} = \overline{AC}$ .

c) Dacă  $\overline{AC} = 3\overline{AB}$ , atunci  $\overline{CA} = -3\overline{BA}$ .

d) Dacă  $\overline{BC} = \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{BD})$ , atunci patrulaterul ABCD este paralelogram.

□ 72. Se consideră paralelogramul ABCD. Să se construiască punctele M, N, P, Q astfel încât:

a)  $\overline{CM} = 2\overline{CB} + \overline{CD}$ ;

b)  $\overline{NA} + \overline{NB} = 2\overline{BC}$ ;

c)  $2\overline{PA} - \overline{PB} = \overline{DA}$ ;

d)  $\overline{QA} + \overline{QB} - \overline{QD} = \vec{0}$ .

□ 73. Se consideră punctele A, B, C. Să se construiască punctul M, în cazurile:

a)  $\overline{BM} - \overline{AB} = \overline{AC}$ ;

b)  $2\overline{AB} = \overline{MC} + \overline{BC}$ ;

c)  $2\overline{MC} - \overline{MB} = \overline{AB}$ ;

d)  $\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{AC}$ .

□ 74. Pe latura [AD] a paralelogramului ABCD se consideră punctul K, astfel încât  $\overline{AK} = \frac{1}{5}\overline{AD}$ , iar pe diagonala [AC] punctul L, astfel încât  $\overline{AL} = \frac{1}{6}\overline{AC}$ .

a) Să se arate că vectorii  $\overline{KL}$  și  $\overline{LB}$  sunt coliniari.

b) Să se determine raportul  $\frac{KL}{LB}$ .

□ 75. Se consideră triunghiul ABC și  $x \in \mathbb{D} \setminus \{-1\}$ . Punctele M și N sunt astfel încât  $\overline{AM} = x\overline{AB} + \overline{AC}$  și  $\overline{BN} = \frac{1}{1+x}\overline{BC}$ .

a) Să se construiască punctele M și N pentru  $x = 2$  și  $x = \frac{3}{4}$ .

b) Să se arate că punctele A, M, N sunt coliniare.

□ 76. Fie ABC un triunghi și punctele  $M \in (AB)$ ,  $N \in (AC)$ , astfel încât  $2\overline{AM} = \overline{BM}$  și  $2\overline{AN} = \overline{CN}$ . Să se exprime în funcție de  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  vectorii  $\overline{BM}$ ,  $\overline{CN}$ ,  $\overline{MN}$ ,  $\overline{BN}$ ,  $\overline{CM}$ .

□ 77. Se consideră paralelogramul ABCD. Să se construiască punctele M, N, P, Q din planul paralelogramului, în cazurile:

a)  $\overline{CM} = 2\overline{CB} + 3\overline{CD}$ ;

b)  $\overline{NA} + 2\overline{NB} = 3\overline{BC}$ ;

c)  $2\overline{PA} - \overline{PB} = 3\overline{DA}$ ;

d)  $\overline{QA} + 3\overline{QB} = 5\overline{QD}$ .

□ 78. Se consideră triunghiul ABC. Să se construiască punctele D și E, astfel încât:

a)  $\overline{DC} - 2\overline{AC} = \frac{1}{3}\overline{BA}$ ;

b)  $\overline{AE} + 3\overline{EB} = \overline{CB}$ .

□ 79. Să se demonstreze că punctele A, B, C sunt coliniare dacă și numai dacă există numerele reale a, b, c, nu toate nule, astfel încât  $a + b + c = 0$  și  $a\overline{OA} + b\overline{OB} + c\overline{OC} = \vec{0}$ , unde O este un punct oarecare.

□ 80. Se consideră segmentul [AB] și  $m, n \in \mathbb{D}$ ,  $m + n \in \mathbb{D}$ .

a) Să se arate că există un singur punct G, astfel încât  $m\overline{GA} + n\overline{GB} = \vec{0}$ .

b) Să se scrie vectorii  $\overline{AG}$  și  $\overline{GB}$  în funcție de  $\overline{AB}$ .

c) Să se arate că pentru oricare M există relația:

$$m\overline{MA} + n\overline{NB} = (m + n)\overline{MG}.$$



### 3 DESCOMPUNEREA UNUI VECTOR DUPĂ DOI VECTORI NECOLINIARI

- 1. Se consideră triunghiul ABC și punctul M mijlocul laturii [BC]. Să se descompună vectorul  $\overline{AM}$  după direcțiile vectorilor  $\overline{AB}$  și  $\overline{AC}$ .
- 2. Se consideră triunghiul ABC și punctele M, N, P mijloacele laturilor [BC], [AC], respectiv [AB]. Să se descompună vectorul  $\overline{AM}$  după direcțiile vectorilor  $\overline{BN}$  și  $\overline{CP}$ .
- 3. Se consideră triunghiul ABC și punctul  $D \in [BC]$ . Să se precizeze poziția punctului D astfel încât componentele vectorului  $\overline{AD}$  după direcțiile vectorilor  $\overline{AB}$  și  $\overline{AC}$  să fie egale.
- 4. Se consideră pătratul ABCD și punctele M și N mijloacele laturilor [BC] și [CD]. Să se descompună vectorul  $\overline{AB}$  după direcțiile vectorilor  $\overline{AM}$  și  $\overline{AN}$ .
- 5. Fie rombul ABCD și  $\vec{a} = \overline{AC}$ ,  $\vec{b} = \overline{AD}$ . Să se descompună după direcțiile vectorilor  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  vectorii  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  și  $\overline{DA}$ .
- 6. Latura [BC] a triunghiului ABC este împărțită de punctul D în raportul  $\frac{BD}{DC} = \frac{m}{n}$ . Să se descompună vectorul  $\overline{AD}$  după direcțiile vectorilor  $\overline{AB}$  și  $\overline{AC}$ .
- 7. În trapezul isoscel ABCD se cunoaște baza mare  $\overline{AB} = \vec{a}$ , una dintre laturile egale  $\overline{AD} = \vec{b}$  și unghiul dintre ele  $m(\widehat{A}) = \frac{\pi}{3}$ . Să se descompună după vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  vectorii  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{DA}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{DB}$ .
- 8. Se consideră paralelogramul ABCD,  $\vec{a} = \overline{AB}$ ,  $\vec{b} = \overline{AD}$ . Să se exprime în funcție de  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  vectorii  $\overline{MA}$ ,  $\overline{MB}$ ,  $\overline{MC}$ ,  $\overline{MD}$ , unde  $\{M\} = AC \cap BD$ .
- 9. Se consideră hexagonul regulat ABCDEF. Să se descompună vectorii  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AD}$ ,  $\overline{AE}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{BD}$ ,  $\overline{BE}$ ,  $\overline{BF}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{CF}$ ,  $\overline{DE}$ ,  $\overline{DF}$  după vectorii  $\vec{a} = \overline{AB}$  și  $\vec{b} = \overline{AF}$ .
- 10. Se consideră hexagonul regulat ABCDEF. Să se descompună vectorii  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AD}$ ,  $\overline{AF}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{BD}$ ,  $\overline{BE}$ ,  $\overline{BF}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{CE}$ ,  $\overline{CF}$ ,  $\overline{DE}$ ,  $\overline{DF}$  după vectorii  $\overline{AC}$  și  $\overline{AE}$ .

### 4 REPER CARTEZIAN

#### 4.1. COORDONATELE UNUI VECTOR

- 1. Se consideră punctele A(2, 4), B(6, 2), C(-4, 4) și E(0, 8).
- a) Să se determine coordonatele vectorilor  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AE}$ .
- b) Să se determine coordonatele vectorilor  $\overline{AB} + \overline{AC}$ ,  $\overline{AC} + \overline{BE}$ ,  $\overline{AB} + \overline{CE}$ .
- 2. Se consideră triunghiul ABC cu vârfurile A(4, 4), B(2, 6) și C(-4, 6).
- a) Să se determine coordonatele vectorilor  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$ .
- b) Să se determine punctul M astfel încât vectorul  $\overline{AM} + \overline{BM} + \overline{CM}$  să aibă coordonatele (8, 8).
- 3. Se consideră punctele A(2, 2), B(-3, -1) și C(3, -2).
- a) Notând cu I mijlocul segmentului [AB], să se determine componentele vectorului  $\overline{OI}$  în funcție de versorii  $\vec{i}$  și  $\vec{j}$ .
- b) Punctele M, N  $\in$  AB sunt astfel încât  $\overline{MB} = -4\overline{MA}$  și  $\overline{NB} = 4\overline{NA}$ . Să se arate că  $5\overline{OM} = 4\overline{OA} + \overline{OB}$  și  $3\overline{ON} = 4\overline{OA} - \overline{OB}$ .
- c) Punctul G  $\in$  CI este astfel încât  $\overline{GC} = -2\overline{GI}$ . Să se arate că  $3\overline{OG} = \overline{OC} + 2\overline{OI} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$ .
- 4. Să se calculeze modulele vectorilor  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$ , dacă:
- a) A(0, -2), B(-2, -1), C(2, 2);
- b) A(2, 3), B(4, 1), C(-1, 2);
- c) A(2, 3), B(-4, 0), C(0, 3);
- d) A(-1, 2), B(3, 6), C(7, 10).
- 5. Să se reprezinte în reperul cartezian (O,  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ), vectorii  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  în situațiile:
- a)  $\vec{a}(-2, 3)$ ,  $\vec{b}(-1, 6)$ ;
- b)  $\vec{a}(5, -10)$ ,  $\vec{b}(-2, 4)$ ;
- c)  $\vec{a}(1 - \sqrt{3}, 1)$ ,  $\vec{b}(3 - \sqrt{3}, -\sqrt{3})$ ;
- d)  $\vec{a}(\sqrt{2}, 1 - \sqrt{3})$ ,  $\vec{b}(1 + \sqrt{3}, -\sqrt{2})$ ;
- e)  $\vec{a}(-1, 3)$ ,  $\vec{b}(\frac{3}{2}, -4, 5)$ .

□ 6. În reperul cartezian  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  se dau punctele  $A(0, 3)$ ,  $B(1, -3)$ ,  $C(2, 4)$ ,  $D(0, 5)$ . Să se determine coordonatele vectorilor  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{BD}$ ,  $\overline{CD}$ .

□ 7. Doi vectori  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  se scriu în funcție de versorii  $\vec{i}$  și  $\vec{j}$  astfel:

$$\vec{a} = \vec{i} - (\vec{i} + \vec{j}) + 2\vec{j}, \quad \vec{b} = -2\vec{i} + 3(-\vec{i} + 2\vec{j}) - \vec{i} + 5\vec{j}.$$

Să se scrie coordonatele vectorilor  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{a} - \vec{b}$ .

□ 8. Se consideră vectorii  $\vec{a}(2, -3)$ ,  $\vec{b}(5, 7)$ ,  $\vec{c}(2, 0)$ . Să se determine coordonatele vectorilor:

- a)  $\vec{a} + \vec{b}$ ;                      b)  $\vec{a} - \vec{b}$ ;                      c)  $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ ;  
d)  $5\vec{a} - 3\vec{b} + 7\vec{c}$ ;            e)  $2\vec{a} - 3\vec{b} - 4\vec{c}$ .

□ 9. Se consideră triunghiul ABC astfel încât  $\overline{AB} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$  și  $\overline{AC} = 5\vec{i} - 4\vec{j}$ . Să se determine coordonatele vectorului  $\overline{BC}$ .

□ 10. Se consideră vectorii  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$  și  $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ . Să se exprime în funcție de vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  vectorii:

- a)  $\vec{v} = 5\vec{i} - \vec{j}$ ;                      b)  $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ ;  
c)  $\vec{v}(-2, 4)$ ;                      d)  $\vec{v}(-3, -5)$ .

□ 11. Fie reperul cartezian  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Să se scrie sub forma  $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$  vectorii:

- a)  $\vec{v}(3, 0)$ ;                      b)  $\vec{v}(0, -2)$ ;  
c)  $\vec{v}(-5, 1)$ ;                      d)  $\vec{v}(-\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ ;  
e)  $\vec{v}(2, -2\sqrt{2})$ ;                f)  $\vec{v}(-1, 1)$ .

□ 12. Fie reperul cartezian  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Construiți punctele A, B, C, D, E, F astfel încât  $\overline{OA} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ ,  $\overline{OB} = 4\vec{j}$ ,  $\overline{OC} = -3\vec{i} + \vec{j}$ ,  $\overline{OD} = -4\vec{i} - 3\vec{j}$ ,  $\overline{OE} = -\frac{3}{2}\vec{i}$ ,  $\overline{OF} = 2\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j}$ .

□ 13. În reperul cartezian  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  se consideră punctele  $A(3, 5)$ ,  $B(2, -4)$ ,  $C(-1, 3)$ ,  $D(-4, -3)$  și  $E(0, -6)$ . Să se determine coordonatele vectorilor  $\overline{AB}$ ,  $\overline{DB}$ ,  $\overline{AE}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{EB}$  și să se exprime acești vectori cu ajutorul versorilor  $\vec{i}$  și  $\vec{j}$ .

□ 14. Se consideră reperul cartezian  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  și punctele  $A(3, 1)$ ,  $B(2, 0)$ ,  $C(-1, 4)$ ,  $D(\sqrt{3}, -\sqrt{2})$ . Să se exprime în funcție de versorii  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  vectorii:  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$ ,  $\overline{OC}$ ,  $\overline{OD}$ ,  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{BD}$ ,  $\overline{AC} + \overline{BD}$ ,  $\overline{AB} + \overline{CD}$ .

□ 15. În reperul cartezian  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  se consideră punctele  $A(2, 3)$ ,  $B(-3, 2)$ ,  $C(4, -1)$ . Să se determine:

- a) coordonatele vectorilor  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$ ,  $\overline{AB}$ ;  
b) coordonatele vectorului  $\overline{OS} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$ ;  
c) coordonatele punctelor  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  mijloacele segmentelor  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,

$[CA]$ .

□ 16. În reperul cartezian  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  se consideră punctele  $A(2, 3)$ ,  $B(-3, 1)$ ,  $C(2, -1)$ . Să se determine:

- a) coordonatele punctului D astfel încât patrulaterul ABCD este paralelogram;  
b) coordonatele centrelor paralelogramelor care au trei dintre vârfuri punctele A, B, C.

□ 17. Se consideră punctul  $A(4, 1)$  și vectorul  $\vec{v}(2, -3)$ . Să se determine coordonatele punctului B pentru care  $\overline{AB} = \vec{v}$ .

□ 18. În reperul cartezian  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  se consideră punctele  $B(-2, 5)$ ,  $A(2, -1)$ ,  $C(-2, -2)$ . Să se determine:

- a) coordonatele punctului D pentru care  $\overline{CD} = 3\overline{AB}$ ;  
b) coordonatele punctului E pentru care  $\overline{BE} = -\frac{3}{5}\overline{AC}$ .

□ 19. Se consideră reperul cartezian  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  și punctele  $A(-11, 0)$ ,  $B(1, 3)$ ,  $C(3, 25)$ ,  $D(5, 3)$ . Vectorii  $\overline{AB}$  și  $\overline{CD}$  sunt liniar dependenti?

□ 20. Fie reperul cartezian  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  și punctele  $A(2, 3)$ ,  $B(-3, 1)$ ,  $C(4, -1)$ . Să se afle:

- a) coordonatele punctului  $D \in Ox$  astfel încât vectorii  $\overline{AB}$  și  $\overline{CD}$  să fie coliniari;  
b) coordonatele punctului E pentru care vectorii  $\overline{BE}$  și  $\overline{AC}$  sunt coliniari, iar mijlocul segmentului  $[BE]$  este pe axa  $Oy$ .

□ 21. Se dau punctele  $A(-1, 2)$ ,  $B(3, 1)$  și  $C(-2, -2)$ . Punctele I și J verifică relațiile  $3\overline{IA} + 5\overline{FB} = \vec{0}$  și  $3\overline{JA} - 5\overline{JB} = \vec{0}$ . Să se arate că:

- a)  $8\overline{OI} = 3\overline{OA} + 5\overline{OB}$ ;
- b)  $-2\overline{OJ} = 3\overline{OA} - 5\overline{OB}$ ;
- c) Să se determine coordonatele vectorilor  $\overline{OI}$  și  $\overline{OJ}$ .

□ 22. În reperul cartezian  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  se consideră punctele  $A(2, 3)$ ,  $B(-3, 1)$ ,  $C(4, -1)$ .

a) Să se determine punctul F cu coordonatele egale, astfel încât vectorii  $\overline{BF}$  și  $\overline{CA}$  să fie coliniari.

b) Să se determine punctul G pentru care vectorii  $\overline{CG}$  și  $\overline{AB}$  sunt coliniari, iar mijlocul segmentului  $[CG]$  are coordonatele egale.

□ 23. Se consideră triunghiul ABC și vectorii  $\vec{a} = \overline{AB}$ ,  $\vec{b} = \overline{CA}$ . Să se determine coordonatele vectorilor  $\overline{AM}$  și  $\overline{BM}$  în reperul  $(O, \vec{a}, \vec{b})$ , dacă:

- a)  $\overline{BM} = 5\overline{AB} + \overline{AC}$ ;
- b)  $\overline{MC} = 2\overline{AB} - 3\overline{AC}$ .

□ 24. Patrulaterul convex ABCD este paralelogram, iar punctul O centrul său. Să se determine coordonatele vectorilor  $\overline{AB}$ ,  $\overline{CA}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{DO}$ ,  $\overline{OP}$ ,  $\overline{AQ}$ ,  $\overline{CS}$ ,  $\overline{SR}$  în reperul  $(O, \vec{a} = \overline{OA}, \vec{b} = \overline{OB})$ , unde P, Q, R, S sunt mijloacele laturilor  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$ ,  $[DA]$ .

□ 25. În reperul cartezian  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  se consideră punctele  $A(1, 3)$  și  $B(4, 0)$ . Să se determine coordonatele punctului C pentru care patrulaterul OBCA este paralelogram.

□ 26. Se consideră vectorul  $\overline{OM} = x\overline{OA} + y\overline{OB}$ , cu A și B puncte date. Să se determine locul geometric al punctului M dacă:

- a)  $x = 2, y \in \mathbb{R}$ ;
- b)  $x \in \mathbb{R}, y = -1$ ;
- c)  $y = 2x + 1, x \in \mathbb{R}$ .

□ 27. Se consideră triunghiul ABC în reperul cartezian ortogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  și punctele M, N, P mijloacele laturilor  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CA]$ . Să se determine coordonatele vectorilor  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  știind că  $\overline{OM} = \vec{i}$ ,  $\overline{ON} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$  și  $\overline{OP} = -\vec{i} + 6\vec{j}$ .

□ 28. În reperul cartezian  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  se consideră punctele  $A(3, 1)$ ,  $B(3, 5)$ ,  $C(-1, 3)$ .

a) Să se determine coordonatele vectorului  $\overline{OM}$  știind că M este egal depărtat de punctele A, B, C.

b) Să se determine coordonatele vectorului  $\overline{PQ}$ , știind că  $P \in Ox$ ,  $Q \in Oy$  și  $PA = PB$ ,  $QB = QC$ .

□ 29. Fie ABCDEF un hexagon regulat și O centrul său. Să se arate că:  
 $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} + \overline{AE} + \overline{AF} = 6\overline{AO}$ .

#### 4.2. DISTANȚA DINTRE DOUĂ PUNCTE

□ 30. Să se arate că:

a) triunghiul cu vârfurile  $A\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ ,  $B\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ ,  $C\left(\frac{9}{2}, 2\right)$  este isoscel;

b) triunghiul cu vârfurile  $A(10, 4)$ ,  $B(12, -30)$ ,  $C(0, 0)$  este dreptunghic;

c) triunghiul cu vârfurile  $A(-1, -2)$ ,  $B(-1, -3)$ ,  $C\left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{5}{2}\right)$  este

echilateral.

□ 31. Să se determine distanța dintre punctele:

a)  $A(2, 3)$ ,  $B(5, 7)$ ;

b)  $A(-3, 4)$ ,  $B(2, 17)$ ;

c)  $A(a + b, a - b)$ ,  $B(a - b, a + b)$ ;

d)  $A(m + 1, 4 - m)$ ,  $B(m + 4, -m)$ .

□ 32. Să se arate că triunghiul cu vârfurile:

a)  $A(0, -2)$ ,  $B(6, 6)$ ,  $C(-8, 4)$  este isoscel;

b)  $A(1, 8)$ ,  $B(3, 2)$ ,  $C(9, 4)$  este isoscel;

c)  $A(-10, -4)$ ,  $B(-12, 30)$ ,  $C(0, 0)$  este dreptunghic;

d)  $A(0, -2)$ ,  $B(0, -4)$ ,  $C(-\sqrt{3}, -3)$  este echilateral.

□ 33. Să se determine perimetrul triunghiului ABC dacă:

a)  $A(5, 7)$ ,  $B(1, 10)$ ,  $C(-3, -8)$ ;

b)  $A(2, 3)$ ,  $B(5, 7)$ ,  $C(-2, -4)$ .

- 34. Să se arate că triunghiurile ABC și MNP sunt congruente în cazurile:
- a)  $A(7, 1)$ ,  $B(7, 4)$ ,  $C(3, 1)$ ,  $M\left(-\frac{2}{5}, \frac{16}{5}\right)$ ,  $N(2, 5)$ ,  $P(2, 0)$ ;  
 b)  $A(10, 4)$ ,  $B(10, 7)$ ,  $C(6, 4)$ ,  $M\left(\frac{3}{5}, \frac{21}{5}\right)$ ,  $N(3, 6)$ ,  $P(3, 1)$ .
- 35. Se consideră punctele  $A(4, 3)$  și  $B(3, 5)$ . Să se determine punctul C de pe axele de coordonate pentru care triunghiul ABC este dreptunghic.
- 36. Să se determine punctul egal depărtat de axele de coordonate și de punctul  $A(4, 10)$ .
- 37. Un triunghi echilateral ABC are vârfurile  $A(3, 2)$ ,  $B(1, 2)$ . Să se determine coordonatele vârfului C.
- 38. Se dau punctele  $A(2, 3)$ ,  $B(-3, 4)$ . Să se determine punctele de pe axele de coordonate egal depărtate de punctele A și B.
- 39. Două vârfuri ale unui paralelogram sunt  $A(2, 3)$  și  $B(3, 7)$ , iar centrul paralelogramului este punctul  $M(5, 6)$ . Să se afle coordonatele pentru celelalte două vârfuri.
- 40. Fie punctele  $A(2, 3)$  și  $B(-2, 7)$ . Să se determine punctele C și D astfel încât punctele A, B, C și D să fie vârfurile unui pătrat.
- 41. Să se arate că patrulaterul ABCD, unde:
- a)  $A(1, 1)$ ,  $B(2, 3)$ ,  $C(0, 4)$ ,  $D(-1, 2)$  este dreptunghi;  
 b)  $A(0, 0)$ ,  $B(1, 1)$ ,  $C(0, 2)$ ,  $D(-1, 1)$  este pătrat.
- 42. Triunghiul OAB este dreptunghic în A și  $OA = 3$ ,  $AB = 4$ . Să se determine coordonatele punctului A, știind că  $B \in Ox$ .
- 43. Să se determine lungimile medianelor triunghiului ABC dacă:
- a)  $A(2, 5)$ ,  $B(-1, 1)$ ,  $C(-10, 0)$ ;  
 b)  $A(-3, 7)$ ,  $B(1, 9)$ ,  $C(4, -4)$ .
- 44. Se consideră punctul D mijlocul laturii  $[BC]$  a triunghiului ABC. Să se arate că  $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$ .

- 45. Punctul C este mijlocul segmentului  $[AB]$ . Să se determine coordonatele punctului B dacă:
- a)  $A(0, 1)$ ,  $C(-1, 2)$ ;      b)  $A(-1, 3)$ ,  $C(1, -1)$ ;  
 c)  $A(0, 0)$ ,  $C(-2, 2)$ ;      d)  $A(a, b)$ ,  $C(c, d)$ .
- 46. Un patrulater convex ABCD are vârfurile  $A(3, -2)$ ,  $B(-3, 4)$ ,  $C(1, 8)$ ,  $D(7, 4)$ , iar punctele M, N, P, Q sunt mijloacele laturilor  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$  și  $[DA]$ . Să se determine:
- a) coordonatele punctelor M, N, P, Q;  
 b) perimetrul patrulaterului MNPQ.
- 47. Se consideră punctele  $A(-5, 8)$ ,  $B(-2, a)$ ,  $C(b, 1)$ . Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$  pentru care B este mijlocul segmentului  $[AC]$ .
- 48. Se consideră triunghiul cu vârfurile  $A(m, 0)$ ,  $B(-m, 0)$ ,  $C(0, 3m)$ . Să se demonstreze că două dintre medianele triunghiului sunt perpendiculare.
- 49. Un pătrat are vârfurile  $A(4, 3)$ ,  $B(2, a)$ ,  $C(b, 1)$ . Să se determine coordonatele celui de-al patrulea vârf al pătratului.
- 50. Punctele  $A(-3, -4)$  și  $B(4, -5)$  sunt vârfurile alăturate ale unui romb cu diagonalele paralele cu axele de coordonate. Să se determine coordonatele vârfurilor necunoscute ale rombului.
- 51. Se consideră triunghiul cu vârfurile  $A(m+1, 1)$ ,  $B(1-m, 1)$ ,  $C(1, 3m+1)$ . Să se arate că două mediane ale triunghiului sunt perpendiculare.
- 52. Să se ordoneze crescător măsurile unghiurilor triunghiului ABC cu vârfurile  $A(4, 3)$ ,  $B(5, 7)$ ,  $C(0, 3)$ .

TESTE DE VERIFICARE

Testul 1

- 1. Se consideră paralelogramul  $MNPQ$  și punctele  $\{O\} = MP \cap NQ$ ,  $A \in NP$ , astfel încât  $\overline{AN} + \overline{AP} = \overline{O}$ . Să se exprime vectorul  $\overline{MA}$  cu ajutorul vectorilor  $MN$  și  $\overline{MQ}$ .
- 2. Se consideră punctele  $A(-3, 10)$ ,  $B(0, a+2)$ ,  $C(b+2, 3)$ .  
 a) Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$  pentru care  $B$  este mijlocul segmentului  $[AC]$ .  
 b) Să se determine  $a, b \in \mathbb{R}$  știind că  $\overline{AB} + 4\overline{BC} + 3\overline{AC} = \overline{O}$ .
- 3. Se consideră triunghiul  $ABC$ . Să se construiască punctele  $D, E$  cu proprietățile  $\overline{DC} + 3\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{BA}$  și  $\overline{AE} + 4\overline{EB} = 3\overline{CB}$ .

Testul nr. 2

- 1. Să se determine tripletele de puncte coliniare:  
 a)  $A(5, 2)$ ,  $B(0, -8)$ ,  $C(3, -2)$ ;  
 b)  $A(4, -2)$ ,  $B(1, 2)$ ,  $C(-2, 6)$ ;  
 c)  $A(a, 2a)$ ,  $B(a+2, 2a+4)$ ,  $C(2, 4)$ .
- 2. Se consideră patrulaterul convex  $ABCD$  și punctele  $M, N$  mijloacele laturilor  $[AB]$  și  $[CD]$ . Dacă  $A(0, -2)$ ,  $B(4, 2)$ ,  $C(6, -2)$ ,  $D(-1, -3)$ , să se arate că  $AD^2 + BC^2 + AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 + 4MN^2$ .
- 3. Un triunghi echilateral  $ABC$  are vârfurile  $A(1, 0)$ ,  $B(-1, 0)$ . Să se determine coordonatele vectorilor  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  în reperul cartezian  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

II. COLINIARITATE, CONCURENȚĂ PARALELISM

1 VECTORUL DE POZIȚIE AL UNUI PUNCT ÎN PLAN

- 1. În reperul cartezian  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  se consideră punctele  $A(2, 4)$ ,  $B(6, 2)$ ,  $C(-1, -3)$ .  
 a) Să se scrie vectorii de poziție pentru punctele  $A, B, C$ .  
 b) Să se scrie vectorii de poziție ai mijloacelor segmentelor  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CA]$ .
- 2. Se consideră triunghiul  $ABC$  cu vârfurile  $A(4, 4)$ ,  $B(6, 4)$ ,  $C(8, 6)$  în reperul  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .  
 a) Să se determine coordonatele vectorilor de poziție ai mijloacelor segmentelor  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CA]$ .  
 b) Să se determine coordonatele vectorului de poziție al punctului  $M$  știind că punctele  $A, B, C, M$  sunt vârfurile unui paralelogram.
- 3. Fie  $ABCD$  un paralelogram. Să se arate că pentru oricare punct  $O$  din plan are loc egalitatea  $\overline{OA} + \overline{OC} = \overline{OB} + \overline{OD}$ .
- 4. Fie  $ABCD$  un paralelogram și punctele  $M, N, P, Q$  mijloacele laturilor  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$ ,  $[DA]$ . Să se demonstreze că  $\overline{r_M} + \overline{r_P} = \overline{r_N} + \overline{r_Q}$ .
- 5. Se consideră triunghiul  $ABC$  și punctele  $M, N, P$  mijloacele laturilor  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[AC]$ . Să se arate că  $\overline{r_A} + \overline{r_B} + \overline{r_C} = \overline{r_M} + \overline{r_N} + \overline{r_P}$ .
- 6. Se consideră  $M, N, P, Q$  mijloacele laturilor  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$ ,  $[DA]$  ale patrulaterului  $ABCD$ . Să se arate că pentru oricare punct  $O$  din plan are loc egalitatea  $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = \overline{OM} + \overline{ON} + \overline{OP} + \overline{OQ}$ .
- 7. Se consideră un triunghi  $ABC$ , punctele  $M, N, P$  mijloacele laturilor  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[AC]$  și  $D, E, F$  mijloacele segmentelor  $[MN]$ ,  $[NP]$ ,  $[PQ]$ . Să se arate că pentru oricare punct  $O$  are loc relația:  $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OM} + \overline{ON} + \overline{OP} = \overline{OD} + \overline{OE} + \overline{OF}$ .

□8. Fie ABC un triunghi și punctele M, N, P astfel încât  $\overline{AB} = 3\overline{AM}$ ,  $\overline{BN} = \frac{1}{3}\overline{BC}$  și  $2\overline{CP} + \overline{AP} = \vec{0}$ . Să se arate că pentru oricare punct O din plan are loc relația  $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OM} + \overline{ON} + \overline{OP}$ .

□9. Se notează cu  $O_1$  și  $O_2$  mijloacele diagonalelor [AC], [BD] ale patrulaterului convex ABCD.

a) Să se arate că  $\overline{O_1O_2} = \frac{\overline{AD} - \overline{BC}}{2}$ .

b) Să se arate că dacă  $\overline{AD} + \overline{CB} = 3\overline{O_1O_2}$ , atunci ABCD este paralelogram.

□10. Se consideră pătratul ABCD și M mijlocul laturii [BC]. Să se determine:

- a) raportul în care AM împarte diagonala [BD];  
b) raportul în care AM împarte segmentul [CD].

□11. Fie ABC un triunghi și punctele  $M \in [AC]$  și  $N \in BC$ , astfel încât  $AM = MC$  și  $BC = CN$ . Să se determine:

- a) raportul în care dreapta BM împarte segmentul [AN];  
b) raportul în care MN împarte segmentul [AB].

□12. Fie ABCD un dreptunghi, punctele M și N mijloacele laturilor [BC] și [CD], iar  $\{P\} = AB \cap DM$ ,  $\{Q\} = PN \cap AD$ . Să se determine valoarea rapoartelor  $\frac{PB}{PA}$  și  $\frac{QD}{QA}$ .

□13. Punctele M, N sunt mijloacele laturilor [AB] și [BC] ale dreptunghiului [ABCD]. Să se afle raportul în care:

- a) dreapta DN împarte segmentul [AC];  
b) dreapta DN împarte segmentul [CM];  
c) dreapta CM împarte segmentul [DN];  
d) dreapta AC împarte segmentul [DN];  
e) dreapta AN împarte segmentul [CM].

□14. În triunghiul ABC se consideră  $D \in (BC)$  astfel încât  $BD = 2DC$ , punctul E mijlocul segmentului [AB] și punctul F mijlocul medianei din C. Să se arate că punctele A, F, D sunt coliniare și să se calculeze raportul  $\frac{AF}{AD}$ .

□15. Se consideră paralelogramul ABCD și  $M \in AB$  astfel încât  $A \in (MB)$  și  $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$ . Dreapta MD intersectează BC în N. Să se determine  $\frac{BC}{BN}$ .

□16. Se consideră pătratul ABCD și punctul M mijlocul laturii [CD]. În exteriorul pătratului ABCD se construiește pătratul DMNP. Să se determine:  
a) raportul în care dreapta BN împarte segmentul [CD], respectiv [AD];  
b) raportul în care BP împarte segmentul [CD].

□17. Fie ABCD un pătrat, punctul  $E \in DC$  astfel încât  $D \in (EC)$  și  $\frac{ED}{EC} = \frac{1}{4}$ . Dacă  $F \in (BC)$ , astfel încât  $BF = DE$ , să se afle raportul în care dreapta EF împarte segmentele [AD], [AC] și [BD].

□18. Se consideră punctele A, B, C, O în plan. Să se determine punctul D cu proprietatea că  $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = \vec{0}$ .

□19. În patrulaterul ABCD se consideră punctele  $E \in (BC)$ ,  $F \in (AD)$ ,  $G \in (AB)$ ,  $H \in (DC)$ , astfel încât  $\frac{BE}{EC} = \frac{AF}{FD} = \alpha$  și  $\frac{AG}{GB} = \frac{DH}{HC} = \beta$ .  
Se notează  $\{M\} = EF \cap GH$ . Să se arate că  $\frac{GM}{MH} = \alpha$  și  $\frac{FM}{ME} = \beta$ .

□20. Se consideră paralelogramele ABCD și  $A_1B_1C_1D_1$  și punctele  $M \in (AA_1)$ ,  $N \in (BB_1)$ ,  $P \in (CC_1)$ ,  $Q \in (DD_1)$ , astfel încât  $\frac{MA}{MA_1} = \frac{NB}{NB_1} = \frac{PC}{PC_1} = \frac{QD}{QD_1} = k$ ,  $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ . Să se demonstreze că dacă MNPQ este patrulater, el este un paralelogram.

□21. Fie ABC un triunghi și  $\vec{a} = \overline{BA}$ ,  $\vec{b} = \overline{BC}$ . Pe dreptele AB, AC și BC se consideră punctele M, N, P astfel încât  $\frac{MA}{MB} = -\frac{1}{3}$ ,  $\frac{NC}{NA} = -\frac{2}{3}$ ,  $\frac{PC}{PB} = \frac{2}{9}$ .

- a) Să se exprime  $\overline{BN}$  în funcție de  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ .  
b) Să se exprime  $\overline{BN}$  în funcție de  $\overline{BM}$  și  $\overline{BP}$ .  
c) Să se arate că punctele M, N, P sunt coliniare.

□22. Se consideră punctele M și N pe laturile triunghiului ABC, astfel încât  $M \in (AB)$ ,  $N \in (AC)$  și  $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{NA} = 2$ . Dacă O este mijlocul segmentului [MN], să se determine:

- a) raportul în care AO împarte segmentul [BC];
- b) raportul în care CO împarte segmentul [AB];
- c) raportul în care BO împarte segmentul [AC].

□23. Pe laturile (AB) și (AC) ale triunghiului ABC se consideră punctele  $D \in (AB)$ ,  $E, F \in (AC)$  astfel încât  $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{CF}{AC} = \frac{3}{4}$ . Dacă M este mijlocul laturii [AB] să se afle raportul în care se împart segmentele [ME] și [DF].

□24. Fie ABCD un patrulater oarecare, E mijlocul segmentului (AB) și  $M \in (BC)$ ,  $N \in (AD)$ , astfel încât  $\frac{BM}{BC} = \frac{AN}{AD} = \alpha$ .

- a) Să se exprime  $\overline{EM}$  și  $\overline{EN}$  în funcție de  $\alpha$  și  $\overline{EA}$ ,  $\overline{EC}$ ,  $\overline{ED}$ .
- b) Să se arate că mijloacele segmentelor (AB), (MN) și (CD) sunt coliniare.

□25. Se consideră ABCDEF un hexagon regulat și punctele  $M \in (AC)$ ,  $N \in (CE)$  astfel încât  $\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = \alpha$ .

- a) Să se exprime vectorii  $\overline{BM}$  și  $\overline{BE}$  în funcție de  $\alpha$  și  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ .
- b) Să se determine  $\alpha$  știind că punctele B, M, N sunt coliniare.

□26. Se consideră triunghiul ABC și punctele  $M \in (AB)$ ,  $N \in AC$ , astfel încât  $\overline{MB} = 3\overline{AM}$ . Știind că există  $\alpha \in \mathbb{R}$  astfel încât  $\overline{BC} + \alpha\overline{MN} = \vec{0}$ , să se calculeze  $\frac{NC}{AN}$  și  $\frac{NA}{AC}$ .

□27. Fie ABC un triunghi și punctele  $M \in (AB)$  și  $N \in (AC)$  astfel încât  $MN \parallel BC$ . Să se determine numerele naturale m, n știind că:

- a)  $AM = 2$ ,  $BM = n$ ,  $AN = n^2$ ,  $CN = 4$ ;
- b)  $AM = n$ ,  $BM = 14$ ,  $AN = 4$ ,  $CN = n + 1$ ;
- c)  $AM = 2$ ,  $BM = n$ ,  $AN = m$ ,  $CN = 4$ .

□28. Pe laturile triunghiului ABC se consideră punctele  $M \in (AB)$ ,  $N \in (AC)$ ,  $P \in (BC)$ , astfel încât  $MN \parallel BC$  și  $PN \parallel AB$ . Să se determine modulul vectorului  $\overline{BP}$  știind că  $|\overline{AM}| = 3$ ,  $AN = n \in \mathbb{N}$ ,  $BM = n + 1$ ,  $PC = n^2$  și  $|\overline{BP}| \in \mathbb{N}$ .

□29. Pe laturile triunghiului echilateral ABC se consideră punctele  $M \in (AB)$ ,  $N \in (AC)$  astfel încât  $AM = m$ ,  $AN = 6$ ,  $BM = 3$ ,  $CN = n$ . Știind că  $m, n \in \mathbb{N}$  și că există  $p \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $\overline{BC} + p\overline{MN} = \vec{0}$ , să se determine m, n și p.

□30. Pe latura (BC) a triunghiului ABC se consideră punctul M, iar pe dreptele AC, respectiv AB, punctele N și P. Știind că  $MN \parallel AB$  și  $MP \parallel AC$ , să se demonstreze că:

$$\text{a) } \frac{NC}{AC} + \frac{PB}{AB} = 1; \text{ b) } \frac{PA}{AB} + \frac{NA}{AC} = 1.$$

□31. Se consideră triunghiul ABC și punctul M din plan astfel încât  $\overline{AB} + \overline{AC} + 2\overline{MA} = \vec{0}$ . Printr-un punct  $D \in (BC)$  se duce paralela la dreapta AM care intersectează dreptele AB și AC în punctele E și F. Să se demonstreze că  $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$ .

□32. Printr-un punct P de pe latura (BC) a triunghiului ABC se duce paralela la mediana AD care intersectează dreptele AB și AC în M, respectiv N. Să se demonstreze că  $\overline{MP} + \overline{NP} + 2\overline{DA} = \vec{0}$ .

□33. Fie ABC un triunghi,  $D \in (BC)$  și  $M \in (AD)$ . Paralelele prin M la AB și AC intersectează latura [BC] în N și P. Să se demonstreze că  $\frac{MD}{AD} = \frac{NP}{BC}$ .

□34. În patrulaterul ABCD o dreaptă d conține punctul O de intersecție a diagonalelor AC și BD și intersectează laturile (AB) și (CD) în punctele M și N. Să se demonstreze că  $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{ND}{NC} = \frac{OA}{OC} \cdot \frac{OD}{OB}$ .

□35. Fie M un punct în interiorul triunghiului ABC și  $\{D\} = AM \cap BC$ ,  $\{E\} = BM \cap AC$ ,  $\{F\} = CM \cap AB$ . Să se demonstreze că  $\frac{MD}{AD} + \frac{ME}{BE} + \frac{MF}{CF} = 1$ .

□36. Pe laturile patrulaterului convex ABCD se iau punctele  $E \in (AB)$ ,  $F \in (BC)$ ,  $G \in (CD)$ ,  $H \in (AD)$  astfel încât  $\frac{AE}{BE} = \frac{CF}{BF} = \frac{CG}{GD} = \frac{AH}{DH}$ . Să se demonstreze că patrulaterul EFGH este paralelogram.

□37. Se consideră patrulaterul convex ABCD. Paralela prin A la dreapta BC intersectează diagonala BD în punctul F, iar paralela prin B la AD intersectează diagonala AC în E. Să se demonstreze că vectorii  $\overrightarrow{EF}$  și  $\overrightarrow{CD}$  sunt vectori coliniari.

□38. Se consideră triunghiul ABC și punctele  $M, Q \in (BC)$ ,  $P, S \in (AB)$ ,  $N, R \in (AC)$  astfel încât grupele de vectori  $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{RQ}$ , respectiv  $\overrightarrow{PN}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{SR}$  și  $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{AC}$  sunt formate din vectori coliniari. Să se demonstreze că vectorii  $\overrightarrow{MS}$  și  $\overrightarrow{AC}$  sunt vectori coliniari.

□39. Pe laturile paralelogramului ABCD se consideră punctele  $P \in (BC)$ ,  $Q \in (AD)$ ,  $M \in (AB)$ ,  $N \in (CD)$ . Dacă  $\{O\} = MN \cap PQ \cap AC$ , iar perechile de vectori  $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BC}$  și  $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{DC}$  sunt formate din vectori coliniari, să se arate că vectorii  $\overrightarrow{MQ}$  și  $\overrightarrow{PN}$  sunt vectori coliniari.

□40. Fie ABCD un trapez cu baza AB și punctele  $P \in (AD)$ ,  $Q \in (BC)$  astfel încât vectorii  $\overrightarrow{AQ}$  și  $\overrightarrow{CP}$  sunt vectori coliniari. Să se demonstreze că vectorii  $\overrightarrow{BP}$  și  $\overrightarrow{DQ}$  sunt coliniari.

□41. Fie A un punct fix în plan și vectorul  $\vec{v}$  nenul. Să se determine locul geometric al punctelor M pentru care există  $m \in \mathbb{R}$  astfel încât  $\overrightarrow{AM} = m\vec{v}$ .

□42. Se consideră triunghiul ABC. Să se determine locul geometric al punctelor M din plan în cazurile:

- a)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$ ;
- b)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$ ;
- c)  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = AB + BC + CA$ .

□43. Fie ABCD un pătrat cu latura  $AB = 1$  și punctele  $M \in (AB)$ ,  $N \in (BC)$  astfel încât  $\frac{AM}{MB} = 7$ ,  $\frac{CN}{BN} = 2$  și  $\{P\} = CM \cap DN$ .

- a) Să se arate că  $13\overrightarrow{AP} = 12\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AD}$ .
- b) Să se calculeze  $|\overrightarrow{AP}|$ .

□44. Fie ABCD un patrulater convex, E mijlocul laturii  $[AB]$  și  $M \in (BC)$ ,  $N \in (AD)$  cu proprietatea că  $\frac{BM}{BC} = \frac{AN}{AD} = k$ . Dacă P este mijlocul segmentului  $[MN]$ , iar  $\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD} = \vec{0}$ , să se arate că:

- a)  $\overrightarrow{EM} = (1-k)\overrightarrow{AE} + k\overrightarrow{EC}$ ,  $\overrightarrow{EN} = (1-k)\overrightarrow{EA} + k\overrightarrow{ED}$ ;
- b) punctele P, Q, E sunt coliniare.

## 2 CENTRE DE GREUTATE

□1. Se consideră triunghiul ABC și punctele  $E \in (AC)$ ,  $M \in (BC)$ , astfel încât  $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC} = \vec{0}$ . Dacă  $\{N\} = AM \cap BE$ , să se arate că punctul N este centrul de greutate al triunghiului ABC dacă și numai dacă  $\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{MN} = \vec{0}$ .

□2. Fie triunghiul ABC și punctele  $N \in AB$ ,  $M \in (BC)$ ,  $O \in AM$ , astfel încât  $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} = \vec{0}$  și  $\overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{MO} = \vec{0}$ . Să se arate că dacă vectorii  $\overrightarrow{CO}$  și  $\overrightarrow{NO}$  sunt coliniari, atunci punctul M este mijlocul segmentului  $[BC]$  și O centrul de greutate al triunghiului ABC.

□3. Se consideră triunghiul ABC, punctul G centrul de greutate al triunghiului și  $G'$  simetricul lui G față de punctul M, mijlocul segmentului  $[BC]$ .

- a) Să se arate că  $\overrightarrow{G'G} = \overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{G'C}$ .
- b) Să se determine  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  pentru care  $\alpha\overrightarrow{G'A} + \beta\overrightarrow{G'B} + \gamma\overrightarrow{G'C} = \vec{0}$ .

□4. Se consideră paralelogramul ABCD, O centrul său și punctele M și N astfel încât  $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$  și  $\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN} = \vec{0}$ . Să se arate că punctul O este centrul de greutate al triunghiului AMN.

□5. Fie ABC un triunghi,  $M \in (BC)$  și punctele  $G_1, G_2$  centrele de greutate ale triunghiurilor ABM și ACM.

- a) Să se arate că vectorii  $\overrightarrow{BC}$  și  $\overrightarrow{G_1G_2}$  sunt coliniari.
- b) Să se determine  $\alpha \in \mathbb{R}$  astfel încât  $\overrightarrow{BC} + \alpha\overrightarrow{G_1G_2} = \vec{0}$ .
- c) Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC, să se arate că vectorii  $\overrightarrow{G_1G}$  și  $\overrightarrow{G_2G}$  sunt vectori coliniari.

□6. Fie patrulaterul convex ABCD și  $G_1, G_2$  centrele de greutate ale triunghiurilor ABD și ABC. Să se arate că vectorii  $\overrightarrow{G_1G_2}$  și  $\overrightarrow{CD}$  sunt coliniari și să se determine  $\alpha \in \mathbb{R}$  cu proprietatea că  $\overrightarrow{CD} = \alpha \cdot \overrightarrow{G_1G_2}$ .

□7. Se consideră paralelogramul ABCD și punctele M, N, P, Q centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, BCD, CDA și DAB. Să se demonstreze că patrulaterul MNPQ este paralelogram.

□8. Se consideră patrulaterul convex ABCD și  $G_1, G_2$  centrele de greutate ale triunghiurilor ADC și BCD. Să se demonstreze că  $2\overline{G_1G_2} = \overline{AG_1} - \overline{BG_2}$ .

□9. Fie O un punct interior patrulaterului ABCD și  $G_1, G_2, G_3, G_4$  centrele de greutate ale triunghiurilor OAB, OBC, OCD și ODA. Să se demonstreze că patrulaterul  $G_1G_2G_3G_4$  este paralelogram.

□10. Se consideră triunghiul ABC și G centrul său de greutate. Se notează cu E simetricul punctului G față de mijlocul segmentului [BC]. Paralela prin E la BC intersectează dreapta AC în M, paralela prin E la AC intersectează AB în N, iar paralela prin E la AB intersectează BC în P. Să se arate că vectorii  $\overline{MP}$  și  $\overline{NP}$  sunt vectori coliniari.

□11. Paralelele prin vârfurile triunghiului ABC la laturile opuse se intersectează două câte două în punctele M, N, P. Să se arate că triunghiurile ABC și MNP au același centru de greutate.

□12. Se consideră triunghiul ABC și punctele M, N, P mijloacele laturilor acestuia. Să se arate că triunghiurile ABC și MNP au același centru de greutate.

□13. Fie M, N, P, Q, R, S mijloacele laturilor consecutive ale unui hexagon convex. Să se arate că triunghiurile MPR și NQS au același centru de greutate.

□14. Fie ABC și MNP două triunghiuri și  $G_1, G_2$  centrele de greutate ale acestora. Să se arate că  $\overline{AM} + \overline{BN} + \overline{CP} = 3\overline{G_1G_2}$ .

□15. Se consideră triunghiul ABC și G centrul său de greutate. Să se arate că pentru oricare punct M are loc egalitatea  $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 3\overline{MG}$ .

□16. Să se arate că triunghiurile ABC și MNP au același centru de greutate dacă și numai dacă  $\overline{AM} + \overline{BN} + \overline{CP} = \vec{0}$ .

□17. Fie ABC un triunghi și punctele  $M \in (AB), N \in (AC)$ . Să se demonstreze că dreapta MN conține centrul de greutate al triunghiului ABC dacă și numai dacă  $\frac{MB}{MA} + \frac{NC}{NA} = 1$ .

□18. Pe laturile triunghiului ABC se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABD, BCE și ACF. Să se arate că triunghiurile ABC și DEF au același centru de greutate.

□19. Pe laturile patrulaterului convex ABCD se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABM, BCN, CDP și DAQ. Să se arate că patrulaterul ABCD și MNPQ au același centru de greutate.

□20. Triunghiurile ABC și  $A_1B_1C_1$  au același centru de greutate. Să se demonstreze că segmentele  $[AA_1], [BB_1], [CC_1]$  pot fi laturile unui triunghi.

□21. Se consideră patrulaterul convex ABCD și punctele  $G_1, G_2, G_3, G_4$  centrele de greutate ale triunghiurilor BCD, ABD, ACD și ABC. Să se demonstreze că  $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = \overline{OG_1} + \overline{OG_2} + \overline{OG_3} + \overline{OG_4}$ , pentru oricare punct O din plan.

□22. Se consideră romb ABCD și punctele  $M \in (AB), N \in (BC)$  și  $P \in (CD)$ . Să se arate că centrul de greutate al triunghiului MNP aparține dreptei AC dacă și numai dacă  $AM + DP = BN$ .

□23. Se consideră triunghiul ABC, punctele  $A', B', C'$  mijloacele laturilor [BC], [AC], [AB] și M, N, P, Q puncte din plan cu proprietatea că  $4\overline{AM} = 3\overline{AB}, 5\overline{AN} = 3\overline{AC}, 5\overline{BP} = 2\overline{BC}, BQ = 2\overline{BA}$ .

a) Să se demonstreze că  $\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} = \vec{0}$ .

b) Să se arate că dreptele MN și PQ conțin centrul de greutate al triunghiului ABC.

□24. Fie ABC un triunghi în reperul  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  și  $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), C(c_1, c_2)$ . Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC să se arate că:  $\overline{OG} = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3} \cdot \vec{i} + \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3} \cdot \vec{j}$ .

□25. Pe laturile triunghiului ABC se consideră punctele  $M \in (AB), N \in (BC), P \in (AC)$  și se notează  $\alpha = \frac{AM}{AB}, \beta = \frac{BN}{BC}, \gamma = \frac{CP}{CA}$ .

a) Să se arate că centrul de greutate al triunghiului MNP aparține mediane din A dacă și numai dacă  $\alpha + \gamma = 2\beta$ .

b) Să se arate că triunghiurile ABC și MNP au același centru de greutate dacă și numai dacă  $\alpha = \beta = \gamma$ .

TESTE DE VERIFICARE

Testul nr. 1

- 1. Fie M mijlocul laturii [BC] a pătratului ABCD. Să se demonstreze că centrele de greutate ale triunghiurilor ABM, ADM și CDM sunt vârfurile unui triunghi dreptunghic.
- 2. Se consideră dreptunghiul ABCD și punctele M, N mijloacele segmentelor [AB] și [BC]. Se notează  $\{E\} = DM \cap CB$  și  $\{F\} = DN \cap AB$ . Să se arate că punctul B este centrul de greutate al triunghiului DEF.
- 3. Se consideră paralelogramele ABCD și DCEF și  $G_1, G_2$  centrele de greutate ale acestora. Să se demonstreze că vectorii  $\overline{BE}$  și  $\overline{G_1G_2}$  verifică relația  $|\overline{BE}| = 2|\overline{G_1G_2}|$ .

Testul nr. 2

- 1. Fie ABCD un patrulater convex, punctele M, N, P, Q mijloacele segmentelor [AB], [BC], [CD], [DA], iar G centrul de greutate al triunghiului ACD. Să se arate că dreptele MP, NQ și BG sunt concurente.
- 2. Fie ABCD un patrulater convex și  $G_1, G_2, G_3, G_4$  centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, BCD, CDA și DAB. Să se demonstreze că dreptele  $G_1D, G_2A, G_3B$  și  $G_4C$  sunt concurente.
- 3. Fie O un punct în planul triunghiului ABC și punctele M, N, P simetricele sale în raport cu mijloacele laturilor [AB], [BC], [CA]. Să se determine poziția punctului O pentru care triunghiurile ABC și MNP au același centru de greutate.

3 TEOREMA BISECTOAREI. RELAȚIA LUI SYLVESTER

- 1. Se consideră triunghiul ABC și [AD bisectoarea interioară a unghiului  $\hat{A}$ . Dacă  $AB = c, BC = a$  și  $AC = b$ , să se calculeze lungimile segmentelor [BD] și [CD].
- 2. Se consideră triunghiul ABC și punctul  $D \in (BC)$ . Paralela prin C la AD intersectează pe AB în punctul F. Să se demonstreze că [AD este bisectoarea unghiului  $\widehat{BAC}$  dacă și numai dacă  $m(\widehat{ACF}) = m(\widehat{BAD})$ .
- 3. Fie ABC un triunghi și  $D \in (BC)$  astfel încât  $b\overline{BD} + c\overline{CD} = \vec{0}$ . Să se arate că [AD este bisectoarea unghiului  $\widehat{BAC}$ .
- 4. Se consideră triunghiul ABC și [AD bisectoarea unghiului  $\hat{A}$ . Să se demonstreze că au loc relațiile:
  - a)  $b\overline{AB} + c\overline{AC} = (b+c)\overline{AD}$ ;
  - b)  $b\overline{MB} + c\overline{MC} = (b+c)\overline{MD}$ , pentru oricare punct M din plan.
- 5. Să se demonstreze că vectorul de poziție al punctului I, centrul cercului înscris în triunghiul ABC, este dat de relația  $\vec{r}_I = \frac{a\vec{r}_A + b\vec{r}_B + c\vec{r}_C}{a+b+c}$ .
- 6. Fie I intersecția bisectoarelor interioare ale triunghiului ABC. Să se demonstreze că  $a\overline{IA} + b\overline{IB} + c\overline{IC} = \vec{0}$ .
- 7. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC și I centrul cercului înscris. Să se arate că are loc relația:
  - a)  $a\overline{GA} + b\overline{GB} + c\overline{GC} = (a+b+c)\overline{GI}$ ;
  - b)  $\overline{IA} + \overline{IB} + \overline{IC} = 3\overline{IG}$ .
- 8. Punctul D aparține laturii BC a triunghiului ABC astfel încât  $b\overline{BD} + c\overline{DC} = \vec{0}$ . Să se arate că [AD este bisectoarea exterioară a unghiului  $\widehat{BAC}$ .
- 9. Pe latura (BC) a triunghiului ABC se consideră punctele M, N, P cu proprietatea că  $\widehat{BAM} \equiv \widehat{MAN} \equiv \widehat{NAP} \equiv \widehat{PAC}$ . Să se demonstreze egalitatea  $\frac{MB}{MN} \cdot \frac{PN}{PC} \cdot \frac{NC}{NB} = 1$ .

□10. Fie ABCD un pătrat,  $M \in (CD)$ ,  $N \in (AB)$  astfel încât vectorii  $\overline{MN}$  și  $\overline{AD}$  sunt coliniari. Bisectoarele interioare ale unghiurilor  $\widehat{ANM}$  și  $\widehat{BNM}$  intersectează laturile  $[AD]$  și  $[BC]$  în punctele P și Q, iar pe AM și BM în S și T. Să se arate că:

- a)  $\frac{AS}{SM} + \frac{BT}{TM} = 1$ ;  
 b) dreapta PQ trece prin centrul pătratului;  
 c) dreapta ST conține centrul de greutate al triunghiului AMB.

□11. În planul triunghiului ABC se consideră punctele M, N, D astfel încât  $D \in (BC)$ ,  $BM = AB$ ,  $CN = AC$ , iar patrulaterul BMCN este trapez cu diagonala BC și bazele BM și CN. Să se arate că  $[AD]$  este bisectoarea unghiului  $\widehat{A}$  dacă și numai dacă punctele M, D, N sunt coliniare.

□12. În triunghiul ABC dreptunghic în A, bisectoarea unghiului  $\widehat{ABC}$  intersectează înălțimea AD în F și mediana AM în E.

Să se demonstreze că  $AE \cdot AF = 2EM \cdot DF$ .

□13. Bisectoarele unghiurilor  $\widehat{A}$  și  $\widehat{D}$  ale paralelogramului ABCD intersectează diagonalele BD și AC în punctele M și N. Să se arate că vectorii  $\overline{MN}$  și  $\overline{BC}$  sunt coliniari.

□14. Fie O intersecția diagonalelor  $[AC]$  și  $[BD]$  ale paralelogramului ABCD. Pe semidreapta opusă semidreptei  $[BD]$  se consideră punctul E astfel încât  $\widehat{BAC} \equiv \widehat{BAE}$ . Dacă  $\{G\} = BC \cap AE$  și  $\{F\} = AB \cap CE$ , să se arate că:

- a)  $\frac{AB}{BF} - \frac{AC}{AE} = 1$ ;      b)  $\frac{BC}{BG} - \frac{CF}{EF} = 1$ .

□15. În triunghiul ABC, mediana BM intersectează bisectoarea  $[CN]$  în punctul P. Să se arate că  $\frac{PC}{NP} = 1 + \frac{AC}{BC}$ .

□16. În triunghiul ABC înălțimea și mediana din A împart unghiul  $\widehat{A}$  în trei părți congruente. Să se determine măsura unghiurilor triunghiului ABC.

□17. În triunghiul ABC se consideră punctele  $D \in (AB)$ ,  $E \in (AC)$ ,  $M \in (BC)$ ,  $N \in (DE)$  astfel încât  $\frac{MB}{MC} = \frac{ND}{NE} = \frac{BD}{CE}$ . Să se demonstreze că dreapta MN este paralelă cu bisectoarea unghiului  $\widehat{BAC}$ .

□18. Se consideră triunghiul ABC și punctele  $M \in (AB)$ ,  $N \in (AC)$  astfel încât  $BM = CN$ . Să se arate că dreapta care unește mijloacele segmentelor  $[MN]$  și  $[BC]$  este paralelă cu bisectoarea interioară a unghiului  $\widehat{BAC}$ .

□19. Se consideră triunghiul ABC și  $D, Q \in BC$  astfel încât  $AD \perp BC$  și  $QB = QC$ . Dacă O, H reprezintă centrul cercului circumscris și ortocentrul triunghiului, să se arate că:

- a)  $\overline{AH} = 2\overline{OQ}$ ;  
 b)  $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$ . (*Relația lui Sylvester*)

□20. Paralelele duse prin vârfurile A, B, C ale triunghiului ABC la dreptele BC, AC, AB se intersectează în punctele  $A_1, B_1, C_1$ . Dacă  $H_1$  este ortocentrul triunghiului  $A_1B_1C_1$ , să se arate că  $\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} = \overline{HH_1}$ .

□21. Să se demonstreze că într-un triunghi centrul cercului circumscris, centrul de greutate și ortocentrul sunt puncte coliniare.

□22. Să se arate că în oricare triunghi ABC, cu notațiile uzuale, au loc egalitățile:

- a)  $\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} = 3\overline{HG}$ ;      b)  $\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} = 2\overline{HO}$ .

□23. Fie ABC un triunghi și  $O'$  mijlocul segmentului  $[OH]$ . Să se arate că are loc egalitatea  $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = 2\overline{OO'}$ . (*Relația lui Euler*)

□24. Se consideră triunghiul ABC și H ortocentrul său. Să se demonstreze că mijloacele segmentelor  $[AH]$ ,  $[BH]$ ,  $[CH]$ , mijloacele laturilor  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CA]$  și picioarele înălțimilor sunt 9 puncte situate pe același cerc. (*Cercul lui Euler*)

□25. Din vârful B al paralelogramului ABCD, cu  $m(\widehat{B}) > 90^\circ$ , se duc perpendicularele BM, BN pe AD și CD,  $M \in (AD)$ ,  $N \in (CD)$ . Dacă H este ortocentrul triunghiului BMN, să se arate că MHND este un paralelogram.

□26. Se consideră triunghiul ABC ascuțitunghic și AD, BE, CF înălțimi,  $D \in (BC)$ ,  $E \in (AC)$ ,  $F \in (AB)$ .

- a) Să se arate că AD este bisectoarea unghiului  $\widehat{EDF}$ .  
 b) Să se arate că ortocentrul triunghiului ABC este centrul cercului înscris în triunghiul DEF.

□27. Să se demonstreze că simetricile ortocentrului unui triunghi în raport cu laturile triunghiului sunt pe cercul circumscris triunghiului.

□28. Fie  $H$  ortocentrul triunghiului  $ABC$ . Pe înălțimile din  $A, B, C$  se consideră vectorii  $\overrightarrow{HD}, \overrightarrow{HE}, \overrightarrow{HF}$  de sensuri opuse vectorilor  $\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}$  și cu modulele  $BC, AC$ , respectiv  $AB$ . Să se arate că  $\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HF} = \vec{0}$ .

□29. Fie triunghiul  $ABC$  și  $O, G, H$  centrul cercului circumscris, centrul de greutate, respectiv ortocentrul triunghiului. Pe semidreptele  $(OA), (OB), (OC)$  se consideră punctele  $D, E, F$  astfel încât  $\frac{OD}{OA} = \frac{OE}{OB} = \frac{OF}{OC} = k, k > 2$ , iar pe segmentele  $[DB], [EC], [AF]$  se iau punctele  $M, N, P$  cu proprietatea că  $\frac{DM}{MB} = \frac{EN}{NC} = \frac{FP}{PA} = k - 2$ . Să se arate că centrul de greutate al triunghiului  $MNP$  este mijlocul segmentului  $[HG]$ .

□30. Fie  $I$  un punct interior triunghiului  $ABC$ . Să se arate că:  
 a) punctul  $I$  este centrul cercului înscris dacă și numai dacă  $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ ;  
 b) dacă  $I$  este centrul cercului înscris atunci triunghiul  $ABC$  este echilateral dacă și numai dacă  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ .

□31. Fie  $[AD], [BE], [CF]$  bisectoarele interioare ale triunghiului  $ABC$ . Să se arate că  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$  dacă și numai dacă triunghiul  $ABC$  este echilateral.

□32. Fie  $ABCD$  un paralelogram astfel încât  $AB = 4, BC = 2, BD = 3$ . Dacă  $G$  este centrul de greutate al triunghiului  $ABD$ , punctul  $I$  este centrul cercului înscris în triunghiul  $BCD$  și  $M \in (BC)$  astfel încât  $BM = 2MC$ , să se arate că:

- a)  $9\overrightarrow{PI} = 4\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} + 2\overrightarrow{PD}$  pentru oricare punct  $P$ ;  
 b) punctele  $G, I, M$  sunt coliniare.

□33. Se dă triunghiul  $ABC$  și punctele  $M, O$  din plan,  $M$  în interiorul triunghiului. Dacă  $a = S_{(MBC)}, b = S_{(MAC)}, c = S_{(MAB)}$  și  $\{N\} = AM \cap BC$  să se arate că:

- a)  $\frac{BN}{CN} = \frac{c}{b}$ ;      b)  $(a + b + c)\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}$ .

□34. Se dă patrulaterul  $ABCD$  în care  $BC = AD$ . Bisectoarele unghiurilor  $\hat{A}$  și  $\hat{B}$  intersectează diagonalele  $BD$  și  $AC$  în punctele  $M$  și  $N$ . Să se arate că  $\frac{MB}{MD} = \frac{NA}{NC}$ .

□35. Fie  $[AD]$  bisectoarea interioară a unghiului  $\widehat{BAC}$  în triunghiul  $ABC$ . Să se arate că  $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$ .

## TESTE DE VERIFICARE

### Testul nr. 1

- 1. Fie  $ABC$  un triunghi și  $M \in (BC)$ . Bisectoarele interioare ale unghiurilor  $\widehat{AMB}$  și  $\widehat{AMC}$  intersectează  $AB$  în  $P$ , respectiv  $AC$  în  $Q$ . Să se arate că vectorii  $\overrightarrow{PQ}$  și  $\overrightarrow{BC}$  sunt coliniari dacă și numai dacă  $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$ .
- 2. În triunghiul  $ABC$  mediana  $AM$  și înălțimea  $AD$  împart unghiul  $\widehat{BAC}$  în trei părți congruente. Să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului  $ABC$ .
- 3. Fie  $D \in (BC)$  astfel încât  $[AD]$  este bisectoarea interioară în triunghiul  $ABC$ . Cercurile de centre  $B$ , respectiv  $C$ , de raze  $BD$  și  $CD$ , intersectează pe  $AB$  în punctele  $N \in (AB)$  și  $P$ , respectiv pe  $AC$  în punctele  $M \in (AC)$  și  $Q$ . Să se arate că vectorii  $\overrightarrow{MN}$  și  $\overrightarrow{PQ}$  sunt coliniari.

### Testul nr. 2

- 1. În dreptunghiul  $ABCD$  bisectoarea unghiului  $\widehat{BAD}$  intersectează  $BD$  în  $E$  și  $BC$  în  $F$ . Paralela prin  $E$  la  $AB$  intersectează pe  $AC$  în  $G$ . Să se arate că  $G$  este ortocentrul triunghiului  $EFB$ .
- 2. Fie paralelogramul  $ABCD$  și  $E$  intersecția bisectoarelor unghiurilor  $\widehat{ABC}$  și  $\widehat{BAD}$ . Să se demonstreze că vectorii  $\overrightarrow{CE}$  și  $\overrightarrow{DE}$  sunt coliniari dacă și numai dacă  $AB = 2BC$ .
- 3. Se consideră triunghiul  $ABC$  dreptunghic în  $A$ . Înălțimea  $AD$  se intersectează cu bisectoarea  $[CE]$  a unghiului  $\widehat{ACB}$  în punctul  $G$ . Dacă  $F \in BC$  astfel încât  $EF \perp BC$  să se arate că:  
 a) triunghiul  $AEG$  este isoscel;  
 b) segmentele orientate  $\overrightarrow{EF}$  și  $\overrightarrow{AG}$  sunt echipotente.

Testul nr. 3

- 1. Se consideră triunghiul ABC și [BD bisectoarea interioară a unghiului  $\widehat{ABC}$ . Se notează cu E și F mijloacele laturilor [AC] și [AB] și cu G proiecția lui A pe BD. Să se arate că:
  - a) vectorii  $\overrightarrow{GF}$  și  $\overrightarrow{BC}$  sunt vectori coliniari;
  - b) vectorii  $\overrightarrow{GE}$  și  $\overrightarrow{GF}$  sunt vectori coliniari.
- 2. Să se demonstreze că simetricile ortocentrului unui triunghi în raport cu mijloacele laturilor triunghiului se află pe cercul circumscris triunghiului.
- 3. Să se arate că proiecțiile unui vârf al triunghiului ABC pe bisectoarele interioare și exterioare din celelalte două vârfuri sunt patru puncte coliniare.

Testul nr. 4

- 1. Fie A', B', C' picioarele bisectoarelor interioare ale unghiurilor  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$ ,  $\widehat{C}$  ale triunghiului ABC. Să se arate că dacă perechile de vectori  $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{AB})$  și  $(\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{BC})$  sunt formate din vectori coliniari, triunghiul ABC este echilateral.
- 2. Se consideră triunghiul ABC cu baza BC și punctele  $M \in AB$ ,  $D \in BC$  astfel încât  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$  și  $MD \perp AB$ . Bisectoarea unghiului  $\widehat{ABC}$  intersectează AD în punctul E, iar bisectoarea unghiului  $\widehat{CAD}$  intersectează BC în F. Să se demonstreze că vectorii  $\overrightarrow{EF}$  și  $\overrightarrow{AC}$  sunt vectori coliniari dacă și numai dacă  $AB = AC$ .
- 3. În triunghiul isoscel ABC, cu baza BC se duce înălțimea AD,  $D \in [BC]$ . Bisectoarele interioare ale unghiurilor  $\widehat{ABC}$  și  $\widehat{DAC}$  intersectează AD în P, respectiv pe DC în Q. Să se arate că vectorii  $\overrightarrow{PQ}$  și  $\overrightarrow{AC}$  sunt coliniari dacă și numai dacă triunghiul ABC este dreptunghic.

4 TEOREMA LUI MENELAU

- 1. Se consideră triunghiul ABC neisoscel și punctele  $D \in BC$ ,  $E \in AC$  și  $F \in AB$  astfel încât [AD], [BE], [CF] sunt bisectoarele exterioare ale unghiurilor  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$ , respectiv  $\widehat{C}$ . Să se arate că punctele D, E, F sunt coliniare.
- 2. Fie D mijlocul laturii [BC] a triunghiului ABC și  $M \in AD$  astfel încât  $AM = MD$ . Să se determine raportul în care BM împarte segmentul [AC].
- 3. Se consideră triunghiul isoscel ABC, dreptunghic în A. Să se determine:
  - a) raportul în care bisectoarea interioară a unghiului  $\widehat{A}$  împarte mediana din vârful B.
  - b) raportul în care mediana din B împarte bisectoarea interioară din vârful C.
- 4. Pe laturile triunghiului ABC se consideră punctele  $M \in (AB)$ ,  $N \in (AC)$  astfel încât  $\overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{CN} = \vec{0}$ . Să se afle raportul în care dreapta MN împarte segmentul [BC].
- 5. Fie ABC un triunghi dreptunghic cu catetele  $AB = 3$ ,  $AC = 4$  și [AD bisectoarea interioară a unghiului  $\widehat{A}$ . Bisectoarea unghiului  $\widehat{ADC}$  intersectează cateta [AC] în punctul E. Să se determine raportul în care BE împarte:
  - a) mediana din A;
  - b) segmentul [AD].
- 6. Se consideră trapezul ABCD și M mijlocul bazei mari [AB]. Fie  $P \in BC$  diferit de mijlocul segmentului [BC]. Se notează  $\{Q\} = MP \cap AC$ ,  $\{X\} = AB \cap QD$ ,  $\{Y\} = AB \cap DP$ . Să se arate că  $MX = MY$ .
- 7. Fie ABCD un patrulater convex și  $\{M\} = AB \cap CD$ ,  $\{N\} = AD \cap BC$ . Să se demonstreze că are loc relația  $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{MC}{MD} = \frac{NA}{NB} \cdot \frac{NC}{ND}$ .
- 8. În triunghiul ABC se consideră punctele  $D \in (AB)$ ,  $E \in (AC)$  astfel încât  $\frac{BD}{DA} = \frac{EA}{EC} = 3$ . Să se determine raportul în care dreapta DE împarte mediana din vârful A.

□9. Fie ABC un triunghi, punctul D simetricul centrului de greutate față de mijlocul segmentului [AB] și E simetricul punctului C în raport cu B. Să se arate că punctele A, D, E sunt coliniare.

□10. În triunghiul ABC se consideră punctele  $D \in (AB)$ ,  $E \in (AC)$  astfel încât  $\frac{DA}{DB} = \frac{EC}{EA}$ . Să se arate că mijloacele segmentelor [AB], [DE] și [AC] sunt coliniare.

□11. Fie ABCD un patrulater convex și punctele  $M \in (AB)$ ,  $N \in (BC)$ ,  $P \in (CD)$ ,  $Q \in (AD)$ . Să se arate că dacă dreptele MN, PQ, AC sunt concurente, atunci dreptele NP, MQ, BD sunt concurente sau paralele.

□12. Fie D un punct oarecare pe latura [BC] a triunghiului ABC. Bisectoarea unghiului  $\widehat{ADC}$  intersectează AC în E, iar bisectoarea unghiului  $\widehat{ADB}$  intersectează AB în F. Dacă  $\{P\} = BE \cap CF$ , să se arate că punctele A, D, P sunt coliniare.

□13. Bisectoarea unghiului  $\widehat{A}$  în paralelogramul ABCD intersectează diagonala [BD] în Q și latura [BC] în T. Fie P un punct oarecare pe segmentul (QT). Dreptele BP și DP intersectează (CD) și (BC) în M, respectiv N. Să se arate că  $BN = DM$ .

□14. Laturile AB și CD ale unui patrulater convex ABCD se intersectează în E, iar laturile AD și BC se intersectează în F. Să se arate că mijloacele segmentelor [AC], [BD], [EF] sunt coliniare. **(Dreapta Newton-Gauss)**

□15. Se consideră triunghiul ABC și punctul M interior acestuia. Se notează  $\{E\} = AC \cap BM$ ,  $\{F\} = AB \cap CM$ ,  $\{D\} = BC \cap AM$ . Să se demonstreze că are loc relația  $\frac{EA}{EC} + \frac{FA}{FB} = \frac{MA}{MD}$ . **(Relația lui Van Aubel)**

□16. Fie A, B, C puncte pe o dreaptă d și  $A', B', C'$  pe dreapta  $d'$ , astfel încât  $AB' \cap A'B = \{M\}$ ,  $AC' \cap A'C = \{N\}$ ,  $BC' \cap B'C = \{P\}$ . Să se arate că M, N, P sunt coliniare. **(Teorema lui Pappus)**

□17. Să se arate că dacă vârfurile a două triunghiuri sunt situate pe trei drepte concurente și laturile omoloage se intersectează în trei puncte, atunci aceste puncte sunt coliniare. **(Teorema lui Desargues)**

□18. O dreaptă d taie laturile triunghiului ABC în punctele  $A_1, B_1, C_1$ . Dacă  $A_2, B_2, C_2$  sunt simetricile punctelor  $A_1, B_1, C_1$  în raport cu mijlocul laturii pe care ele se află, să se arate că punctele  $A_2, B_2, C_2$  sunt coliniare.

□19. Se consideră punctul M interior triunghiului ABC și d o dreaptă paralelă cu BC dusă prin vârful A. Se notează  $\{D\} = (AM \cap (BC))$ ,  $\{E\} = (BM \cap (AC))$ ,  $\{F\} = (CM \cap (AB))$ ,  $\{P\} = d \cap DE$ ,  $\{Q\} = d \cap DF$ . Să se arate că vectorii  $\overline{AP}$  și  $\overline{AQ}$  sunt vectori opuși.

□20. În interiorul triunghiului ABC se consideră un punct M. Bisectoarele unghiurilor  $\widehat{BMC}$ ,  $\widehat{AMC}$ ,  $\widehat{AMB}$  intersectează laturile (BC), (AC), (AB) în punctele D, E, respectiv F. Să se arate că:

a) dreptele AD, BE, CF sunt concurente într-un punct P;

b) punctul M este centrul cercului circumscris triunghiului ABC dacă și numai dacă  $\frac{PA}{PD} \cdot \frac{PB}{PE} \cdot \frac{PC}{PF} = 8$ .

□21. Fie ABC un triunghi și punctele  $M \in (AB)$ ,  $N \in (AC)$ ,  $P \in (BC)$ ,  $\{Q\} = AP \cap MN$ . Să se demonstreze că  $\frac{MQ}{NQ} = \frac{BP}{CP} \cdot \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AM}{AN}$ .

□22. Fie ABCDEF un hexagon înscris într-un cerc. Să se arate că punctele  $\{M\} = AB \cap DE$ ,  $\{N\} = BC \cap EF$  și  $\{P\} = CD \cap AF$  sunt puncte coliniare. **(Teorema lui Pascal)**

### III. ELEMENTE DE TRIGONOMETRIE

#### 1 UNGHIURI ȘI ARCE MĂSURA UNGHIURILOR ȘI A ARCELOR

- 1. Să se exprime în radiani:  
 $1^\circ, 10^\circ, 5^\circ, 36^\circ, 15^\circ, 25^\circ, 72^\circ, 135^\circ, 275^\circ, 315^\circ, 240^\circ$ .
- 2. Să se exprime în grade sexagesimale:  
 $\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{15}, \frac{\pi}{20}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{5}, \frac{9\pi}{10}, \frac{17\pi}{36}$ .
- 3. Să se exprime în grade sexagesimale:  
 $\frac{5\pi}{7}, \frac{5\pi}{13}, \frac{7\pi}{20}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{11}, \frac{19\pi}{20}, \frac{16\pi}{11}, \frac{15\pi}{37}$ .
- 4. Să se determine măsura unghiurilor  $\alpha$  și  $\beta$  știind că suma acestora măsurată în radiani este  $\frac{\pi}{2}$  și diferența lor măsurată în grade sexagesimale este  $30^\circ$ .
- 5. Se consideră un cerc cu raza  $R = 10$ . Să se determine lungimea arcului care corespunde unui unghi la centru cu măsura de:  
**a)**  $60^\circ$ ; **b)**  $90^\circ$ ; **c)**  $45^\circ$ ; **d)**  $\frac{\pi}{6}$ ; **e)**  $\frac{5\pi}{12}$ ; **f)**  $\frac{6\pi}{5}$ .
- 6. Se consideră un triunghi ABC înscris într-un cerc cu centrul O și raza  $R = 10$ . Se știe că  $m(\widehat{BOC}) = 120^\circ$  și  $m(\widehat{B}) = 30^\circ$ . Să se determine lungimile arcelor  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{BC}$ ,  $\widehat{AC}$ .
- 7. Să se exprime în grade și radiani măsura unghiurilor următoarelor poligoane regulate convexe:  
**a)** triunghi; **b)** pătrat; **c)** pentagon; **d)** hexagon;  
**e)** heptagon; **f)** octogon; **g)** decagon; **h)** dodecagon.
- 8. Un triunghi isoscel are măsura unui unghi de  $30^\circ$ . Să se exprime în grade și radiani măsurile celorlalte unghiuri.

#### 2 GENERALIZAREA NOȚIUNII DE UNGHI

- 1. Să se exprime în grade și radiani unghiul de rotație al unui volant care efectuează:  
**a)** 2 rotații; **b)** 2,5 rotații; **c)**  $\frac{3}{8}$  rotații;  
**d)**  $\frac{8}{5}$  rotații; **e)** 1,(6) rotații; **f)** 7,1(6) rotații.
- 2. Un ventilator face 4500 de rotații pe minut. Să se exprime în radiani și grade arcul descris de un punct al elicei ventilatorului în:  
**a)** 1 s; **b)** 2,5 s; **c)** 40 s; **d)** 1 min; **e)** 15 min; **f)** 2 h; **g)** 1,5 h.
- 3. Care este arcul mai mic de  $360^\circ$  ale cărui extremități coincid cu ale arcului de:  
**a)**  $1968^\circ$ ; **b)**  $572^\circ$ ; **c)**  $2160^\circ$ ; **d)**  $\frac{18\pi}{5}$ ; **e)**  $\frac{52\pi}{5}$ ;  
**f)**  $-24^\circ$ ; **g)**  $-379^\circ$ ; **h)**  $1289^\circ$ ; **i)**  $-\frac{7\pi}{3}$ ?
- 4. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}$  funcție de acoperire universală. Să se precizeze punctele de pe cercul trigonometric ce corespund pentru:  
**a)**  $f(0)$ ; **b)**  $f(\pi)$ ; **c)**  $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ ; **d)**  $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ ; **e)**  $f\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ ; **f)**  $f\left(\frac{7\pi}{2}\right)$ ;  
**g)**  $f\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$ ; **h)**  $f\left(-\frac{11\pi}{3}\right)$ ; **i)**  $f\left(\frac{1273\pi}{3}\right)$ ; **j)**  $f\left(-\frac{4175\pi}{6}\right)$ .
- 5. Să se exprime în grade unghiurile cu măsura:  
**a)**  $\frac{117\pi}{2}$ ; **b)**  $-\frac{2173\pi}{3}$ ; **c)**  $-24,(3)\pi$ ; **d)**  $21,1(6)\pi$ .
- 6. Să se exprime în grade și radiani măsurile unghiurilor unui triunghi știind că acestea sunt direct proporționale cu numerele:  
**a)** 3, 5, 7; **b)** 1, 2, 3; **c)** 2, 2, 5; **e)** 1, 3, 8.
- 7. Să se exprime în grade și radiani măsurile unghiurilor unui patrulater știind că acestea sunt direct proporționale cu:  
**a)** 5, 6, 7, 12; **b)** 3, 6, 12, 15; **c)** 1, 2, 7, 8; **d)** 3, 4, 5, 6.

□8. Să se exprime în grade și radiani măsurile unghiurilor unui patrulater convex știind că are trei unghiuri congruente, iar suma a trei dintre măsurile unghiurilor este egală cu:

- a)  $240^\circ$ ;      b)  $300^\circ$ ;      c)  $\frac{3\pi}{2}$ ;      e)  $\frac{5\pi}{3}$ .

□9. Completați tabelul următor cu valorile corespunzătoare:

Grade	$30^\circ$	$45^\circ$			$75^\circ$		$135^\circ$	$150^\circ$	$-30^\circ$			$180^\circ$
Radiani			$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$				$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{12}$	

□10. Se consideră cercul  $\mathcal{C}(O, r)$  și punctele P, Q pe cerc. Să se determine măsurile în radiani pentru unghiul  $\widehat{POQ}$  dacă:

- a)  $r = 8$  cm și  $l(\widehat{PQ}) = 12$  cm;      b)  $r = 10$  cm și  $l(\widehat{PQ}) = 40$  cm;  
 c)  $r = 10$  cm și  $l(\widehat{PQ}) = 5$  cm;      d)  $r = 4$  cm și  $l(\widehat{PQ}) = 20$  cm.

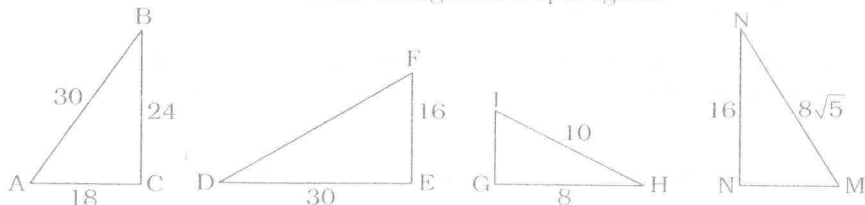
□11. Să se transforme în grade și să se specifice în care cadran sunt situate unghiurile cu măsurile:

- a)  $\frac{\pi}{4}$ ; b)  $\frac{\pi}{6}$ ; c)  $\frac{7\pi}{6}$ ; d)  $\frac{5\pi}{2}$ ; e)  $\frac{\pi}{2}$ ; f)  $-\frac{3\pi}{2}$ ; g)  $\frac{7\pi}{12}$ ; h)  $\frac{\pi}{24}$ ; i)  $\frac{5\pi}{12}$ ; j)  $-\frac{9\pi}{5}$ ;  
 k)  $-\frac{20\pi}{3}$ ; l)  $\frac{100\pi}{3}$ ; m)  $-\frac{11\pi}{2}$ ; n)  $-\frac{23\pi}{6}$ ; o)  $-\frac{2753\pi}{10}$ ; p)  $-\frac{11273\pi}{5}$ .

### 3 FUNCȚII TRIGONOMETRICE

#### 3.1. FORMULELE TRIGONOMETRICE ÎN TRIUNGIUL DREPTUNGHIC

□1. Se consideră următoarele triunghiuri dreptunghice:



Să se calculeze:

- a)  $\sin A$ ,  $\cos A$ ,  $\operatorname{tg} A$ ,  $\operatorname{ctg} A$ ;  
 b)  $\sin D$ ,  $\cos D$ ,  $\operatorname{tg} F$ ,  $\operatorname{ctg} F$ ;  
 c)  $\sin H + \cos M$ ,  $\sin P + \cos I + \operatorname{tg} M$ .

□2. Se consideră triunghiul ABC în care se cunosc  $AB = AC = 17$ ,  $BC = 16$ . Să se calculeze  $\sin B$ ,  $\cos B$ ,  $\operatorname{tg} B$ .

□3. În triunghiul dreptunghic ABC se cunoaște ipotenuza  $BA = 25$  cm.

- a) Dacă  $\sin A = 0,8$ , să se afle lungimile laturilor triunghiului ABC.  
 b) Dacă  $\cos A = 0,6$ , să se determine  $\operatorname{tg} A$ .  
 c) Dacă  $\operatorname{tg} A = \frac{24}{7}$ , să se afle lungimile laturilor triunghiului ABC.

□4. Se consideră triunghiul ABC în care  $AC = 30$ ,  $AB = 50$  și  $\cos A = 0,8$ . Să se afle aria triunghiului ABC.

□5. Se consideră paralelogramul ABCD cu  $BD \perp AB$ . Știind că  $AB = 10$  și  $\operatorname{tg} A = 1$ , să se determine aria paralelogramului.

□6. Baza unui triunghi isoscel este egală cu 16 cm, iar unghiul opus acesteia are măsura de  $30^\circ$ . Să se afle lungimile înălțimilor triunghiului.

□7. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu  $m(\widehat{A}) = 90^\circ$ .

Dacă  $x = m(\widehat{B})$ , să se arate că:

- a)  $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ ; b)  $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ ; c)  $\sin x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}}$ ;  
 d)  $\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$ ; e)  $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$ ; f)  $\cos x = \frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}}$ .

□8. Să se demonstreze că dacă  $x \in (0^\circ, 90^\circ)$ , atunci:

- a)  $\frac{1 - \sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$ ;      b)  $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ ;  
 c)  $\frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{ctg} x} + \frac{\operatorname{ctg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = 1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ ;      d)  $\sin(90^\circ - x) = \cos x$ ;  
 e)  $\cos(90^\circ - x) = \sin x$ ;      f)  $\operatorname{tg}(90^\circ - x) = \operatorname{ctg} x$ ;  
 g)  $\operatorname{ctg}(90^\circ - x) = \operatorname{tg} x$ .

□9. Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A. Demonstrați că au loc relațiile:

- a)  $\sin B + \cos B = \sin C + \cos C$ ;  
 b)  $\cos B + \cos C = \sin B + \sin C$ ;  
 c)  $\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C$ .

□10. Se consideră pătratul ABCD și punctele  $M \in (BC)$ ,  $\{N\} = DM \cap AB$ . Să se determine  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ , unde  $x = m(\widehat{ANC})$ , în cazurile:

a)  $BM = MC$ ; b)  $\frac{BM}{MC} = \frac{1}{3}$ ; c)  $\frac{MC}{AD} = \frac{2}{3}$ .

□11. Se consideră triunghiul ABC și punctul  $D \in (BC)$  astfel încât  $AD \perp BC$ . Să se demonstreze egalitatea  $BC = AB \cos B + AC \cos C$ .

□12. Se consideră pătratul ABCD și punctul  $M \in (BC)$ . Se construiește în exteriorul pătratului ABCD, pătratul BMNP.

Să se determine  $\sin(\widehat{CDN})$ ,  $\cos(\widehat{CDN})$  în cazurile:

a)  $BM = MC$ ; b)  $BM = 2MC$ ; c)  $CM = 2BM$ .

□13. Punctul M este situat pe latura (BC) a pătratului ABCD. În exteriorul pătratului ABCD se construiesc pătratele BMPN și CMQR. Dacă  $x = m(\widehat{PDQ})$ , să se calculeze  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{ctg} x$ , știind că  $2BM = CM$ .

□14. Se consideră pătratele ABEF și BCDE. Să se calculeze  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ , dacă  $x = m(\widehat{BFC})$ .

□15. Se consideră pătratele ABGH, BCFG, CDEF.

Să se calculeze  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ , pentru  $x = m(\widehat{BHD})$ .

□16. Să se determine valoarea expresiei:

$$E = \frac{\sin x + \cos x}{\sin(90^\circ - x) + \cos(90^\circ - x)}, \quad x \in (0^\circ, 90^\circ).$$

□17. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu  $m(\widehat{A}) = 90^\circ$ ,  $AB = 6$  cm și  $\sin B = \frac{3}{5}$ . Să se determine lungimile laturilor și înălțimea din A.

□18. Se consideră romb ABCD astfel încât  $m(\widehat{ADC}) = 120^\circ$ ,  $BD = 12$  cm. Să se determine lungimile laturilor și diagonalelor rombului.

□19. Fie ABC un triunghi și  $D \in (BC)$  proiecția punctului A pe dreapta BC. Dacă  $m(\widehat{ABD}) = 60^\circ$ ,  $m(\widehat{ACB}) = 45^\circ$ , să se calculeze lungimile laturilor triunghiului și înălțimilor acestuia știind că  $AD = 8$  cm.

□20. Trapezul ABCD este dreptunghic în vârfurile B și C, iar punctul  $E \in (CD)$  este proiecția punctului A pe dreapta CD.

Știind că  $m(\widehat{DAE}) = 45^\circ$ ,  $m(\widehat{ACD}) = 30^\circ$  și  $AD = 6$  cm, să se determine lungimile laturilor și ale diagonalelor trapezului.

□21. Să se afle elementele triunghiului ABC, dreptunghic în A, dacă:

a)  $BC = 10$  și  $m(\widehat{C}) = 30^\circ$ ;

b)  $AC = 16\sqrt{3}$  și  $m(\widehat{B}) = 60^\circ$ ;

c)  $BC = 34$  și  $AC = 16$ ;

d)  $AB = 24$  și  $AC = 10$ ;

e)  $a = 8$  și  $m(\widehat{C}) = \frac{\pi}{8}$ ;

f)  $c = 4$  și  $m(\widehat{C}) = \frac{\pi}{12}$ .

□22. Să se demonstreze că dacă  $x, y \in (0^\circ, 90^\circ)$ , atunci:

a)  $(\sin x + \sin y)^2 + \cos^2 x + \cos^2 y \geq (1 + \sin x \sin y)^2$ ;

b)  $(\sin x - \sin y)^2 + \cos^2 x + \cos^2 y \geq (1 - \sin x \sin y)^2$ ;

c)  $(\cos x + \cos y)^2 + \sin^2 x + \sin^2 y \geq (1 + \sin x \cos y)^2$ .

□23. Să se demonstreze că dacă  $x \in (0^\circ, 90^\circ)$ , atunci:

a)  $\frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{(1 - \sin x)(1 - \cos x)}{\sin x \cdot \cos x} = 1$ ;

b)  $\frac{1 + \sin^2 x}{2 + \operatorname{ctg}^2 x} + \frac{1 + \cos^2 x}{2 + \operatorname{tg}^2 x} = 1$ .

□24. Să se demonstreze că dacă triunghiul ABC este dreptunghic în A, atunci  $\sin B + \sin C = \sqrt{2}$  dacă și numai dacă  $AB = AC$ .

### 3.2. SEMNUL FUNCȚIILOR TRIGONOMETRICE

□25. Să se stabilească semnul numerelor:

a)  $\sin \frac{273\pi}{11}$ ; b)  $\cos \frac{2143\pi}{20}$ ; c)  $\sin \frac{3275\pi}{23}$ ; d)  $\sin \frac{2003\pi}{46}$ ;

e)  $\operatorname{tg} \frac{2003\pi}{46}$ ; f)  $\operatorname{ctg} \frac{287\pi}{3}$ ; g)  $\sin \frac{39715\pi}{31}$ ; h)  $\operatorname{tg} \frac{3172\pi}{11}$ ; i)  $\cos \frac{23791\pi}{175}$ .

□26. Să se stabilească semnul numerelor:

- a)  $\sin \frac{5\pi}{4} + \sin \frac{1207\pi}{6}$ ; b)  $\cos \frac{13\pi}{4} + \cos \frac{1393\pi}{6}$ ; c)  $\operatorname{tg} \frac{1273\pi}{6} \cdot \sin \frac{273\pi}{9}$ ;  
 d)  $\sin \frac{-7\pi}{8} \cdot \cos \frac{11\pi}{3} \cdot \operatorname{tg} \frac{127\pi}{8}$ ; e)  $\sin \frac{1525\pi}{12} + \cos \frac{1207\pi}{6}$ .

□27. Să se determine semnul numerelor:

- a)  $\sin 273^\circ$ ; b)  $\sin 2754^\circ$ ; c)  $\sin(-726^\circ)$ ; d)  $\cos 1976^\circ$ ;  
 e)  $\operatorname{tg} 119^\circ$ ; f)  $\operatorname{tg} 4726^\circ$ ; g)  $\operatorname{ctg} 9673^\circ$ .

□28. Să se determine semnul numerelor:

- a)  $\sin 1$ ; b)  $\sin 2$ ; c)  $\sin 10$ ; d)  $\cos 11$ ; e)  $\sin 12 \cdot \cos 13$ .

□29. Să se afle semnul numerelor:

- a)  $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{5} - \operatorname{tg} \frac{4\pi}{5}$ ; b)  $\sin \frac{25\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{7}$ ; c)  $\sin 2 - \sin 2,15$ ; d)  $\cos 6 - \cos 5$ .

### 3.3. FORMULE DE REDUCERE LA PRIMUL CADRAN

□30. Să se reducă la primul cadran:

- a)  $\sin 390^\circ$ ; b)  $\sin 3630^\circ$ ; c)  $\cos 750^\circ$ ;  
 d)  $\operatorname{tg}\left(907\frac{\pi}{3}\right)$ ; e)  $\operatorname{ctg}\left(601\frac{\pi}{3}\right)$ ; f)  $\sin\left(\frac{2000\pi}{11}\right)$ .

□31. Să se determine valorile numerice ale expresiilor:

- a)  $2 \sin 30^\circ + 5 \operatorname{tg} 60^\circ + 6 \operatorname{tg} 45^\circ$ ;  
 b)  $\frac{\cos 60^\circ}{1 + \sin 60^\circ} + \frac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ}$ .

□32. Să se determine cea mai mică și cea mai mare valoare a expresiei:

$E(x) = \sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ , pentru  $x \in \{30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 240^\circ, 330^\circ\}$ .

□33. Să se arate că:

$$\frac{\sin(180^\circ - x) \cdot \sin(270^\circ - x) \cdot \cos(360^\circ - x) \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - x)}{\sin(90^\circ + x) \cdot \sin(360^\circ - x) \cdot \cos(180^\circ + x) \cdot \operatorname{tg}(270^\circ + x)} = 1.$$

□34. Să se determine valorile numerice ale expresiilor:

- a)  $\frac{\sin 390^\circ + \cos 390^\circ + \operatorname{tg} 405^\circ}{\sin 405^\circ + \cos 405^\circ + \operatorname{tg} 390^\circ - \sqrt{2}}$ ;  
 b)  $2 \cos 30^\circ - 4 \cos 405^\circ + \operatorname{tg} 420^\circ$ ;

c)  $5 \operatorname{tg} 210^\circ + \operatorname{ctg} 405^\circ + 2 \operatorname{tg}(-45^\circ) + 2 \cos 780^\circ$ ;

d)  $\frac{2 \cos 765^\circ - \sin 810^\circ + \operatorname{tg} 1125^\circ - \sin 765^\circ}{\cos 900^\circ + \cos 780^\circ + \sin 750^\circ + \sin 960^\circ}$ .

□35. Să se aducă la o formă mai simplă:

- a)  $\frac{\sin 10^\circ \cdot \operatorname{tg} 190^\circ \cdot \operatorname{ctg} 280^\circ \cdot \cos 350^\circ}{\cos 80^\circ \cdot \cos 10^\circ \cdot \operatorname{tg} 170^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ}$ ;  
 b)  $\frac{\sin 1950^\circ \cdot \cos(-3810^\circ) \cdot \operatorname{tg}(-1320^\circ) \cdot \sin(-870^\circ)}{\cos 780^\circ \cdot \operatorname{ctg}(-1830^\circ) \cdot \operatorname{tg} 3840^\circ \cdot \cos 1140^\circ}$ .

□36. Să se stabilească relațiile:

- a)  $\sin(x + 180^\circ) = -\sin x$ ; b)  $\cos(x + 180^\circ) = -\cos x$ ;  
 c)  $\sin(x + n\pi) = (-1)^n \cdot \sin x$ ; d)  $\cos(x + n\pi) = (-1)^n \cdot \cos x$ .

□37. Să se stabilească relațiile:

- a)  $\sin(\pi - x) = \sin x$ ; b)  $\cos(\pi - x) = -\cos x$ ;  
 c)  $\sin(n\pi - x) = (-1)^{n-1} \sin x$ ; d)  $\cos(n\pi - x) = (-1)^n \cos x$ .

□38. Să se determine mulțimea valorilor funcțiilor  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , date de:

- a)  $f(x) = \sin x + 1$ ;  
 b)  $f(x) = -1 + \cos x$ ;  
 c)  $f(x) = 2 \sin 2x + 3$ ;  
 d)  $f(x) = |\sin x|$ ;  
 e)  $f(x) = |\sin x| - \sin x$ ;  
 f)  $f(x) = 3 - 2|\sin x|$ ;  
 g)  $f(x) = |1 - \sin x| + \sin x$ ;  
 h)  $f(x) = |1 + \cos x| - \cos x$ ;  
 i)  $f(x) = |1 - \sin x| + |1 + \sin x|$ ;  
 j)  $f(x) = |1 - \cos x| - |1 + \cos x|$ .

□39. Să se demonstreze că oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{D}$ , următoarele numere sunt pozitive:

- a)  $1 + \sin x$ ; b)  $1 - \cos x$ ;  
 c)  $1 + \sin x + \cos x + \sin x \cdot \cos x$ ; d)  $2 - \sin x - \cos y$ ;  
 e)  $5 - 2 \sin x + 3 \cos y$ ; f)  $1 + \sin x + \cos y + \sin x \cdot \cos y$ .

### 3.4. PARITATE. IMPARITATE. PERIODICITATE

□40. Să se studieze paritatea funcțiilor  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

- a)  $f(x) = (\sin x + 1) \cdot \cos x$ ;
- b)  $f(x) = x \sin x$ ;
- c)  $f(x) = x^2 + \sin^2 x$ ;
- d)  $f(x) = 1 + x \cdot \sin x \cdot \cos x$ ;
- e)  $f(x) = (\sin^2 x - \cos x)^2$ ;
- f)  $f(x) = |x + \sin x|$ ;
- g)  $f(x) = (x - \sin x)^2 + (x^2 + \cos x)^2$ ;
- h)  $f(x) = \sin x + |\sin x|$ ;
- i)  $f(x) = \cos x - |\cos x|$ ;
- j)  $f(x) = 3 \sin 3x + 2 \sin 2x$ ;
- k)  $f(x) = 3 \sin(x - 3\pi) + \cos(x + 3\pi)$ ;
- l)  $f(x) = x + x^2 \sin x$ .

□41. Să se studieze paritatea funcțiilor  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ :

- a)  $f(x) = x + \operatorname{tg} x$ ,  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ ;
- b)  $f(x) = x \sin x$ ,  $D = [-1, +\infty)$ ;
- c)  $f(x) = \operatorname{tg} x + \sin x$ ,  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ ;
- d)  $f(x) = \sin x - 1 + (\sin x + \cos x)^2$ ,  $D = \mathbb{R}$ ;
- e)  $f(x) = (\sin x - \cos x)^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;
- f)  $f(x) = |x| + \cos x$ ,  $x \in (0, +\infty)$ ;
- g)  $f(x) = \sin x + (\sin x + \cos x)^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;
- h)  $f(x) = x^3 + \sin 3x$ ,  $x \in [-1, 2]$ .

□42. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = a \sin x + b \cos x$ . Să se arate că dacă funcția  $f$  este funcție pară sau funcție impară, atunci  $a \cdot b = 0$ .

□43. Să se studieze paritatea funcțiilor după parametrii dați:

- a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax + \cos x$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ;
- b)  $f: \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x - a| \cdot \sin x$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ;

c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x - a| \cos x$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ;

d)  $f: \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = a \operatorname{tg} x + b \cos x$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

□44. Să se verifice că  $T = 2\pi$  este perioadă pentru funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , date de:

- a)  $f(x) = \sin x + |\sin 2x|$ ;
- b)  $f(x) = \cos x + \cos 2x$ ;
- c)  $f(x) = \sin x + \sin \left( x + \frac{3\pi}{2} \right)$ ;
- d)  $f(x) = (\sin x - \cos x)^2 + \sin \left( x + \frac{31\pi}{4} \right)$ .

□45. Să se arate că următoarele funcții au perioada  $T = 4\pi$ :

- a)  $f(x) = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{3x}{2}$ ;
- b)  $f(x) = \sin \left( \frac{x + \pi}{2} \right) + \cos \left( \frac{x - \pi}{2} \right)$ ;
- c)  $f(x) = 2 \sin \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{4}$ ;
- d)  $f(x) = \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{3x}{2}$ .

□46. Să se determine perioada principală pentru funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , în cazurile:

- a)  $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ ;
- b)  $f(x) = \sin \frac{2x}{3}$ ;
- c)  $f(x) = 3 \cos \frac{x + \pi}{3}$ ;
- d)  $f(x) = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}$ ;
- e)  $f(x) = \sin x \cdot \sin \frac{x}{2}$ ;
- f)  $f(x) = \sin x \cdot \sin \frac{x}{3}$ .

□47. Să se determine perioada principală a funcției  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , în cazurile:

- a)  $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ ;
- b)  $f(x) = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$ ;
- c)  $f(x) = \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}$ ;
- d)  $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ;
- e)  $f(x) = \operatorname{tg} \frac{3x}{2}$ ;
- f)  $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x + \pi}{2}$ ;
- g)  $f(x) = \sin(x\sqrt{2})$ ;
- h)  $f(x) = \operatorname{tg}(x\sqrt{2})$ .

□48. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dată de relația:

$$f(x) + 2f(-x) = 2 \cos x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

a) Să se studieze paritatea funcției  $f$ .

b) Să se arate că funcția  $f$  este periodică și să se afle perioada sa principală.

□49. Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât există  $a \in \mathbb{R}$  cu proprietatea că  $f(x) + 2f(a-x) = \cos x$ .

a) Să se arate că numărul  $T = 2\pi$  este perioadă a funcției  $f$  oricare  $a \in \mathbb{R}$ .

b) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$ , pentru care funcția  $f$  este funcție pară.

c) Există valori ale lui  $a \in \mathbb{R}$  pentru care funcția  $f$  este funcție impară?

□69. Să se arate că funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x \cdot \sin(x\sqrt{2})$  nu este periodică.

## 4 RELAȚII ÎNTRE FUNCȚIILE TRIGONOMETRICE ALE ACELUIAȘI UNGHII

□1. Să se arate că pe domeniul de existență au loc egalitățile:

a)  $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2;$

b)  $\sin^4 x + \cos^2 x = \cos^4 x + \sin^2 x;$

c)  $\cos^4 x - \sin^4 x = 1 - 2 \sin^2 x;$

d)  $(1 + \operatorname{tg}^2 x) \sin^2 x = \operatorname{tg}^2 x;$

e)  $(1 + \sin x + \cos x)^2 = 2(1 + \sin x)(1 + \cos x);$

f)  $\frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \frac{\sin x + \cos x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = \sin x + \cos x;$

g)  $\left(1 - \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x}\right)^2 = \frac{1}{2}(1 - \sin^4 x - \cos^4 x);$

h)  $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 2 = \left(\frac{1}{\sin x \cos x}\right)^2;$

i)  $\frac{1 + \operatorname{tg}^4 x}{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x} = \operatorname{tg}^2 x.$

□2. Se dă  $\sin x = \frac{2}{3}$ ,  $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ . Să se calculeze  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{ctg} x$ .

Se consideră  $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ . Să se afle după caz  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{ctg} x$ .

a)  $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2};$

b)  $\cos x = \frac{4}{5};$

c)  $\operatorname{ctg} x = -\frac{5}{12}.$

□3. Să se determine  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{ctg} x$  în cazurile:

a)  $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ,  $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{3};$

b)  $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ ,  $\sin x = -\frac{4}{5};$

c)  $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ ,  $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{2};$

d)  $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ ,  $\cos x = -\frac{4}{5}.$

□4. Se consideră  $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$  astfel încât  $\sin x + \cos x = -\sqrt{2}$ . Să se determine  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{ctg} x$ .

□5. Să se compare numerele  $x$  și  $y$  dacă:

$$x = 1 + \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{3\pi}{3} + \cos \frac{4\pi}{3} + \cos \frac{5\pi}{3};$$

$$y = \sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{3\pi}{3} + \sin \frac{4\pi}{3} + \sin \frac{5\pi}{3}.$$

□6. Să se aducă expresiile la o formă mai simplă pentru  $x$  din domeniul de definiție:

a)  $E = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2;$

b)  $E = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 - (\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)^2;$

c)  $E = \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x}.$

□7. Fie  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ . Să se demonstreze egalitatea:

$$(1 + \operatorname{tg} x) \cos^3 x + (1 + \operatorname{ctg} x) \sin^3 x = \sin x + \cos x.$$

□8. Să se verifice egalitățile:

a)  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x;$

b)  $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x;$

c)  $2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) + 1 = 0.$

□9. Să se arate că expresia:

$$E(x) = \sin^8 x - \cos^8 x + 4 \cos^6 x - 6 \cos^4 x + 4 \cos^2 x$$
 nu depinde de  $x$ .

□ 10. Să se arate că pe domeniul de definiție au loc egalitățile:

a)  $(\operatorname{tg}^4 x - 6\operatorname{tg}^2 x + 1)\cos^4 x = 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x$ ;

b)  $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1} = \frac{2}{3}$ ;

c)  $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x} + \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x} = 2$ .

□ 11. Se consideră  $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$  astfel încât  $\sin x + \cos x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$ .

Să se calculeze  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{ctg} x$ .

□ 12. Fie  $a, b \in (0, +\infty)$ ,  $a < b$  și  $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  astfel încât  $\sin x = \frac{b-a}{a+b}$ .

Să se calculeze  $E = \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ .

□ 13. Să se arate că pentru oricare  $a, x \in \mathbb{R}$  au loc inegalitățile:

a)  $(1 - \sin a)x^2 - 2x \cos a + 1 + \sin a \geq 0$ ;

b)  $(1 + \cos a)x^2 - 2x \sin a + 1 - \cos a \geq 0$ .

□ 14. Să se demonstreze că pentru oricare  $x \in \mathbb{R}$ , au loc egalitățile:

a)  $\sin^4 x + \cos^4 x \geq \frac{1}{2}$ ;

b)  $\sin^6 x + \cos^6 x \geq \frac{1}{4}$ .

TESTE DE VERIFICARE

Testul nr. 1

O 1. Să se calculeze valorile funcțiilor trigonometrice pentru unghiurile cu măsura:

a)  $450^\circ$ ; b)  $855^\circ$ ; c)  $-585^\circ$ .

O 2. Să se calculeze:

$$E = \frac{\cos(-480^\circ)}{\cos(680^\circ)} - \frac{\operatorname{tg} 570^\circ \cdot \sin 675^\circ}{\cos 900^\circ};$$

$$F = 2 \sin^2\left(\frac{23\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}^2\left(\frac{37\pi}{4}\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right).$$

O 3. Să se aducă la o formă mai simplă expresia  $E = \frac{(1 + \sin x + \cos x)^2}{(1 + \sin x)(1 + \cos x)}$ .

Testul nr. 2

O 1. Să se arate că are loc egalitatea:

a)  $\sin(x - \pi) + \operatorname{tg}(x - \pi) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \operatorname{tg} x$ ;

b)  $\frac{\sin(540^\circ - x) \cdot \sin(630^\circ - x) \cdot \cos(720^\circ - x) \cdot \operatorname{tg}(450^\circ - x)}{\sin(\alpha - 270^\circ) \cdot \sin(-720^\circ - x) \cdot \cos(540^\circ + x) \cdot \operatorname{tg}(270^\circ + x)} = 1$ .

O 2. Să se stabilească semnul numerelor:

a)  $\sin(-2) - \sin(-2, 1)$ ;

b)  $\cos(5, 1) - \cos 3$ ;

c)  $\operatorname{ctg}(0, 583) - \operatorname{ctg}(0, 582)$ .

O 3. Să se determine că mulțimea de valori a funcțiilor  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

a)  $f(x) = 3 + 5 \cos x$ ;

b)  $f(x) = -2 \sin x + (1 + \sin x)^2$ ;

c)  $f(x) = (\sin x + 2 \cos x)^2 + (\cos x - 2 \sin x)^2$ .

Testul nr. 3

- 1. Un triunghi dreptunghic are ipotenuza de 13 cm și suma celorlalte laturi 17 cm. Să se calculeze produsul cosinusurilor unghiurilor ascuțite.
- 2. Să se arate că pentru oricare  $x \in \mathbb{R}$  au loc inegalitățile:  
a)  $2 \sin x \leq 2 - \cos^2 x$ ; b)  $|3 \sin x + 4 \cos x| \leq 5$ .
- 3. Să se calculeze  $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$  știind că  $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  și  $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -2$ .
- 4. Să se arate că pe domeniul de existență are loc egalitatea:  
$$\left[ \frac{(1 + \operatorname{ctg} x)^2 - (1 + \operatorname{tg} x)^2}{(1 + \operatorname{ctg} x)^2 + (1 + \operatorname{tg} x)^2} \right]^2 + \left( \frac{\operatorname{ctg} x}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \right)^2 = 1.$$

Testul nr. 4

- 1. Să se stabilească egalitatea  $\operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 55^\circ \cdot \operatorname{tg} 75^\circ = 1$ .
- 2. Se știe că  $\sin x + \cos x = m$ .  
a) Să se arate că  $|m| \leq \sqrt{2}$ .  
b) Să se exprime în funcție de  $m$  expresiile:  
 $E = \sin^3 x + \cos^3 x, F = \sin^5 x + \cos^5 x$ .
- 3. Să se arate că expresia  $E = \frac{1 - \cos x + \sin^2 x}{2 + \cos x} + \frac{1 + \cos x + \sin^2 x}{2 - \cos x}$  nu depinde de  $x$ .

## 5 FUNCȚIILE TRIGONOMETRICE ALE UNEI SUME ȘI ALE UNEI DIFERENȚE DE UNGHIIURI

- 1. Să se calculeze:  
a)  $\sin 75^\circ$ ; b)  $\sin 15^\circ$ ; c)  $\sin 105^\circ$ ; d)  $\cos 135^\circ$ ; e)  $\operatorname{tg} 165^\circ$ .
- 2. Să se scrie sub o formă mai simplă expresia:  
$$E = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{31\pi}{2} - x\right) + \cos(5\pi + x) + \sin(x - 11\pi).$$
- 3. Fie  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), y \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  și  $\sin x = \frac{3}{5}, \cos y = -\frac{4}{5}$ .  
Să se calculeze  $\sin(x + y), \sin(x - y), \cos(x + y), \cos(x - y), \sin 2x, \sin 2y, \cos 2x, \cos 2y, \operatorname{tg}(x + y), \operatorname{tg}(x - y)$ .
- 4. Să se calculeze  $\sin(a \pm b), \cos(a \pm b)$ , dacă:  
a)  $\sin a = \frac{3}{5}, \sin b = \frac{5}{13}, a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ;  
b)  $\operatorname{tg} a = \frac{3}{4}, \cos b = \frac{5}{13}, a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ;  
c)  $\operatorname{tg} a = -\frac{5}{2}, \operatorname{tg} b = -\frac{3}{5}, a, b \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ .
- 5. Să se calculeze valorile trigonometrice pentru unghiurile cu măsura:  
 $\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{12}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{8}, \frac{7\pi}{12}$ .
- 6. Să se verifice egalitățile:  
a)  $\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$ ;  
b)  $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$ ;  
c)  $\cos x + \cos\left(\frac{\pi}{3} + y\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - y\right) = \cos y + \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ ;  
d)  $\sin x + \sin(108^\circ - x) - \sin(x - 36^\circ) - \sin(72^\circ - x) = \cos(54^\circ - x)$ .
- 7. Dacă  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  și  $\sin x = \frac{4}{5}, y \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  și  $\cos y = -\frac{3}{5}$ , aflați  $\cos(x - y)$ , respectiv  $\sin(x - y)$ .

□8. Să se calculeze:

- a)  $\sin 75^\circ$ ; b)  $\cos 75^\circ$ ; c)  $105^\circ$ ; d)  $\cos 105^\circ$ ; e)  $\sin 150^\circ$ ; f)  $\cos 150^\circ$ ;  
 g)  $\cos 225^\circ$ ; h)  $\sin 225^\circ$ ; i)  $\sin 240^\circ$ ; j)  $\cos 240^\circ$ ; k)  $\sin 300^\circ$ ;  
 l)  $\cos 300^\circ$ ; m)  $\sin 315^\circ$ ; n)  $\cos 315^\circ$ ; o)  $\sin 405^\circ$ .

□9. Să se afle  $\cos(a+b)$ ,  $\cos(a-b)$  în situațiile:

- a)  $\sin a = \frac{3}{5}$ ,  $\cos b = \frac{5}{13}$ ,  $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ;  
 b)  $\operatorname{tg} a = \frac{4}{3}$ ,  $\cos b = \frac{12}{13}$ ,  $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ;  
 c)  $\operatorname{tg} a = \frac{3}{4}$ ,  $\cos b = \frac{5}{13}$ ,  $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ;  
 d)  $\cos a = -\frac{3}{5}$ ,  $\operatorname{tg} b = -\frac{5}{2}$ ,  $a, b \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ .

□10. Să se aducă la o formă mai simplă expresiile:

- a)  $E(x) = \sin(x+75^\circ) + \sin(x-75^\circ)$ ;  
 b)  $E(x) = \sin(2x+225^\circ) + \sin(2x-45^\circ)$ ;  
 c)  $E(x) = \frac{\sin(x+30^\circ) + \sin(x+60^\circ)}{\cos(x-30^\circ) + \cos(x-60^\circ)}$ .

□11. Să se calculeze  $\sin(\alpha+\beta)$ ,  $\sin(\alpha-\beta)$ , dacă:

- a)  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\sin \beta = -\frac{5}{13}$ ,  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ,  $\beta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ ;  
 b)  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\sin \beta = \frac{5}{13}$ ,  $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ;  
 c)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$ ,  $\cos \beta = \frac{12}{13}$ ,  $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

□12. Să se verifice egalitățile:

- a)  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ ;      b)  $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x$ ;  
 c)  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ ;      d)  $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x$ .

□13. Să se demonstreze egalitățile:

- a)  $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta$ ;  
 b)  $\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2 \sin \alpha \cdot \sin \beta$ ;  
 c)  $\cos(\alpha+\beta) \cdot \cos(\alpha-\beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$ ;

d)  $2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin^2 x - \cos^2 x$ ;

e)  $\sin(\alpha+\beta) \cdot \sin(\alpha-\beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$ .

□14. Să se verifice egalitățile, pentru  $x$  din domeniul de existență:

a)  $\operatorname{tg} x = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$ ;      b)  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$ ;      c)  $\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ ;

d)  $\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ ;      e)  $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sin 2x} - \operatorname{ctg} 2x$ ;

f)  $\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$ ;

g)  $\sin 4x = 4 \sin x \cos x (2 \cos^2 x - 1)$ .

□15. Să se arate că  $\sin x = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$  și  $\cos x = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}$ .

□16. Fie  $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  astfel încât  $\sin x = \frac{12}{13}$ . Să se calculeze:

- a)  $\sin 2x$ ; b)  $\sin 3x$ ; c)  $\cos 3x$ ; d)  $\operatorname{tg} 2x$ ;  
 e)  $\sin 3x + \operatorname{ctg} 3x$ ; f)  $\sin 5x + \cos 5x$ .

□17. Să se determine funcțiile trigonometrice ale unghiurilor cu măsura de  $\frac{\alpha}{2}$

știind că  $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$  și  $\cos \alpha = -\frac{527}{625}$ .

□18. Știind că  $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$ ,  $\operatorname{tg} y = \frac{1}{4}$ ,  $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , să se calculeze  $\operatorname{tg}(2x+y)$ .

□19. Fie  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  și  $\operatorname{tg} x = 2$ . Să se calculeze  $\sin 4x$ ,  $\sin \frac{x}{2}$ ,  $\cos 3x$ ,  $\cos \frac{3x}{2}$ .

□20. Să se arate că:

a)  $\operatorname{tg}(30^\circ + x) \operatorname{tg}(30^\circ - x) = \frac{2 \cos 2x - 1}{2 \cos 2x + 1}$ ;

b)  $\frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} = \operatorname{tg} x$ ;

c)  $\frac{\cos^3 x - \cos 3x}{\cos x} + \frac{\sin^3 x + \sin 3x}{\sin x} = 3$ ;

d)  $\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg} x - 4 \operatorname{ctg} 4x$ ;

e)  $\sin^2 x (1 - \operatorname{ctg} x)^2 = 1 - \sin 2x$ ;

$$f) \frac{\cos(a+b) - \sin(a-b)}{\cos(a-b) - \sin(a+b)} = \frac{\cos b + \sin b}{\cos b - \sin b};$$

$$g) \cos^2(a+b) - \cos^2(a-b) + \sin 2a \cdot \sin 2b = 0;$$

$$h) \cos^2 a + \cos^2 b = 1 + \cos(a+b) \cdot \cos(a-b);$$

$$i) \sin^2(a+b) = \cos^2 a + \cos^2 b - 2 \cos a \cos b \cos(a+b);$$

$$j) \sin^2(a+b) - \sin^2(a-b) = \sin 2a \sin 2b.$$

□21. Să se calculeze:

$$a) \sin(a+b+c), \text{ dacă } a, b, c \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \sin a = \frac{5}{13}, \sin b = \frac{4}{5}, \sin c = \frac{3}{5};$$

$$b) \cos(a-b+c), \text{ dacă } a, b, c \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \cos a = -\frac{4}{5}, \cos b = -\frac{3}{5}, \sin c = \frac{5}{13}.$$

□22. Să se verifice pe domeniul de existență egalitățile:

$$a) \frac{\sin(x+y)\cos(x-y) + \cos(x+y)\sin(x-y)}{\cos(x+y)\cos(x-y) - \sin(x+y)\sin(x-y)} = \operatorname{tg} 2x;$$

$$b) \frac{\sin^2(x+y) + \sin^2(x-y)}{2 \cos^2 x \cos^2 y} = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y.$$

□23. Să se demonstreze că următoarele expresii nu depind de x:

$$a) E = \cos^2(x-x^2) + \cos^2(x^2) - 2 \cos(x-x^2) \cos x \cos x^2 + \cos^2 x;$$

$$b) E = \cos x \sin(y-z) + \cos y \sin(z-x) + \cos z \sin(x-y).$$

□24. Să se verifice egalitatea  $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2 \cdot \frac{3 + \cos 4x}{1 - \cos 4x}$ .

□25. Să se calculeze produsele  $P_n$  pentru  $n \in \mathbb{N}$ :

$$a) P_n = \cos a \cdot \cos \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{a}{2^2} \cdot \dots \cdot \cos \frac{a}{2^n};$$

$$b) P_n = \cos a \cdot \cos 2a \cdot \dots \cdot \cos 2^n a;$$

$$c) P_n = \frac{\sin x}{1 + \cos x} \cdot \frac{\cos \frac{x}{2}}{1 + \cos \frac{x}{2}} \cdot \dots \cdot \frac{\cos \frac{x}{2^n}}{1 + \cos \frac{x}{2^n}}.$$

## 6 TRANSFORMAREA SUMELOR ÎN PRODUS ȘI A PRODUSELOR ÎN SUME

□1. Să se calculeze:

$$a) \sin \frac{5\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{8}; \quad b) \cos \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{5\pi}{24}; \quad c) \sin \frac{3\pi}{8} \cdot \sin \frac{7\pi}{24}.$$

□2. Să se transforme în produs:

$$a) \sin 15^\circ + \sin 75^\circ; \quad b) \sin 75^\circ - \sin 15^\circ;$$

$$c) \cos 15^\circ + \cos 75^\circ; \quad d) \cos 15^\circ - \cos 75^\circ;$$

$$e) \sin 165^\circ \pm \sin 105^\circ; \quad f) \cos 105^\circ \pm \cos 165^\circ;$$

$$g) \sin 195^\circ \pm \sin 255^\circ; \quad h) \sin 285^\circ \pm \sin 345^\circ.$$

□3. Să se transforme în produs:

$$a) \sin 2x + \sin 4x; \quad b) \sin 3x - \sin x;$$

$$c) \sin 7x - \sin 3x; \quad d) \cos x + \cos 5x;$$

$$e) \sin 7x + \sin x; \quad f) \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right);$$

$$g) \cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{5x}{2}; \quad h) \sin \frac{5x}{2} - \sin \frac{3x}{2};$$

$$i) \sin \frac{5x}{4} + \sin \frac{3x}{4}; \quad j) \sin \left(\frac{\pi + 3x}{2}\right) + \sin \left(\frac{3\pi + x}{2}\right).$$

□4. Să se transforme în produs:

$$a) \sin 10^\circ + 2 \sin 25^\circ + \sin 40^\circ;$$

$$b) \cos 20^\circ + \cos 45^\circ + \cos 70^\circ;$$

$$c) \cos \frac{\pi}{8} - 2 \cos \frac{3\pi}{8} + \cos \frac{5\pi}{8};$$

$$d) \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin \left(x + \frac{3\pi}{4}\right);$$

$$e) \cos \left(\frac{x + \pi}{4}\right) - 2 \cos \left(\frac{x + 2\pi}{4}\right) + \cos \left(\frac{x + 3\pi}{4}\right).$$

□5. Să se transforme în produs:

$$a) \sin x + \cos x; \quad b) \sin x - \cos x;$$

$$c) \sin 3x - \cos \frac{\pi + x}{2}; \quad d) \cos \frac{x}{2} + \sin \left(\frac{x + \pi}{2}\right);$$

$$e) \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{3x}{2} - \sin \frac{5x}{2}; \quad f) \sin \frac{9x}{4} - \cos \frac{3x}{4} - \sin \frac{3x}{4}.$$

g)  $\cos \frac{11x}{12} + 2 \sin \frac{29x}{12} - \cos \frac{11x}{36}$ ;

h)  $\cos \frac{5x}{7} - 2 \sin \frac{12x}{35} - \cos \frac{7x}{5}$ .

□6. Să se aducă la o formă mai simplă pe domeniul de existență:

a)  $\frac{\sin(x + 30^\circ) + \sin(x + 60^\circ)}{\cos(x + 30^\circ) + \cos(x + 60^\circ)}$ ;

b)  $\frac{\sin 3x + \sin x}{\cos 3x + \cos x}$ ;

c)  $\frac{\sin 5x - \sin 3x}{\cos 5x - \cos 3x}$ ;

d)  $\frac{\sin(2n+1)x + \sin x}{\cos(2n+1)x - \cos x}$ ;

e)  $\frac{\cos x - \cos 3x}{\sin 3x - \sin x}$ ;

f)  $\frac{\cos 2x - \cos 4x}{\sin 4x - \sin 2x}$ ;

g)  $\frac{\sin 12x + \sin 4x}{\cos 36x + \cos 28x}$ .

□7. Să se verifice egalitățile pe domeniul de existență:

a)  $\frac{\sin 4x - \sin 2x}{\sin 4x + \sin 2x} = \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} 2x$ ;

b)  $\frac{\sin x - \sin y}{\cos y - \cos x} = \operatorname{ctg} \frac{x+y}{2}$ ;

c)  $\frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \operatorname{tg} \frac{x+y}{2}$ ;

d)  $\frac{\sin y + \cos(2x-y)}{\cos y - \sin(2x-y)} = \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - x \right)$ .

□8. Să se descompună în produs:

a)  $\sin 3x + 2 \cos 2x - \sin x$ ;

b)  $\cos x + \sqrt{2} \cos 3x + \cos 5x$ ;

c)  $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x$ ;

d)  $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x$ ;

e)  $\sin x + \sin y + \sin(x+y)$ ;

f)  $\sin x + \sin y - \sin(x+y)$ ;

g)  $\sin x + \sin y - \sin(x-y)$ ;

h)  $\cos a + \cos b + \cos(a+b)$ ;

i)  $\cos a + \cos b - \cos(a-b)$ ;

j)  $\cos a - \cos b + \sin(a+b)$ ;

k)  $\cos a - \cos b - \sin(a+b)$ .

□9. Să se verifice egalitățile:

a)  $(\sin a + \sin b)^2 + (\cos a + \cos b)^2 = 4 \cos^2 \frac{a-b}{2}$ ;

b)  $(\sin a - \sin b)^2 + (\cos a - \cos b)^2 = 4 \sin^2 \frac{a-b}{2}$ ;

c)  $\sin a \sin(a+x) - \sin b \sin(b+x) = \sin(a-b) \sin(a+b+x)$ ;

d)  $\sin x \sin y - \sin z \sin(x+y-z) = \sin(x-z) \sin(y-z)$ .

□10. Să se transforme în produs:

a)  $\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{tg} 75^\circ$ ;

b)  $\operatorname{tg} 105^\circ - \operatorname{tg} 15^\circ$ ;

c)  $\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} x$ ;

d)  $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x$ ;

e)  $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x$ ;

f)  $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 4x$ ;

g)  $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y - \operatorname{tg}(x+y)$ ;

h)  $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y - \operatorname{tg}(x-y)$ .

□11. Să se aducă la o formă mai simplă:

a)  $\frac{\cos^2 3x - \cos^2 x}{\sin^2 3x - \sin^2 x}$ ;

b)  $\frac{\sin^2 7x - \sin^2 4x}{\cos^2 5x - \cos^2 6x}$ ;

c)  $\frac{2 \sin a + \cos 3a - \cos 5a}{2 \cos a + \sin 3a + \sin 5a}$ ;

d)  $\frac{\sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b)}{\cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b)}$ .

□12. Să se transforme în produs:

a)  $\cos^2 a + \sin^2 3a - \cos^2 2a$ ;

b)  $\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a+b+c)$ ;

c)  $\operatorname{tg} 3a - \operatorname{tg} 2a - \operatorname{tg} a$ ;

d)  $\sin^2(a+b) - \sin^2(a-b)$ ;

e)  $\sin(a-b) + \sin(b-a) + \sin(c-a)$ ;

f)  $\cos a + \cos 3a + \sin 2a$ ;

g)  $\cos a + \cos b + \cos c + \cos(a+b+c)$ ;

h)  $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c - \operatorname{tg}(a+b+c)$ ;

i)  $\sin(x+y+z) - \sin(y+z) + \sin z$ ;

j)  $\operatorname{tg}(a-b) + \operatorname{tg}(b-c) + \operatorname{tg}(c-a)$ .

□13. Să se verifice egalitățile:

a)  $\sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}$ ;

b)  $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$ ;

c)  $\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{ctg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{ctg} 27^\circ = 4$ ;

d)  $\sin \frac{5\pi}{24} + \cos \frac{11\pi}{24} + \sin \frac{\pi}{6} = 4 \cos \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{5\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{48}$ ;

e)  $\sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ = \frac{1}{8}$ ;

f)  $\sin \frac{\pi}{24} \cdot \sin \frac{5\pi}{24} \cdot \sin \frac{7\pi}{24} \cdot \sin \frac{11\pi}{24} = \frac{1}{16}$ .

□ 14. Se consideră  $x, y, z \in \mathbb{R}$  astfel încât  $x + y + z = \pi$ . Să se demonstreze că:

a)  $\sin x + \sin y + \sin z = 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2}$ ;

b)  $\sin x + \sin y - \sin z = 4 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2}$ ;

c)  $\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 4 \sin x \sin y \sin z$ ;

d)  $\cos x + \cos y + \cos z = 1 + 4 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{z}{2}$ ;

e)  $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + 2 \cos x \cos y \cos z = 1$ ;

f)  $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \operatorname{ctg} \frac{y}{2} + \operatorname{ctg} \frac{z}{2} = \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{y}{2} \operatorname{ctg} \frac{z}{2}$ .

g)  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{y}{2} + \operatorname{tg} \frac{y}{2} \operatorname{tg} \frac{z}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{z}{2} = 1$ .

□ 15. Dacă  $\sin x + \sin y = -\frac{14}{65}$  și  $\cos x + \cos y = -\frac{8}{65}$  să se calculeze  $\operatorname{tg}(x+y)$  și  $\operatorname{tg} \frac{x-y}{2}$ .

□ 16. Dacă  $x, y, z \in \mathbb{R}$  astfel încât  $x + y + z = \pi$  să se verifice egalitățile:

a)  $\sin x - \sin y + \sin z = 4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \sin \frac{z}{2}$ ;

b)  $\cos x - \cos y - \cos z = 1 - 4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2}$ ;

c)  $\sin \frac{x}{2} + \sin \frac{y}{2} + \sin \frac{z}{2} = 1 + 4 \sin \frac{\pi-x}{4} \cdot \sin \frac{\pi-y}{4} \cdot \sin \frac{\pi-z}{4}$ ;

d)  $\sin \frac{x}{2} + \sin \frac{y}{2} - \sin \frac{z}{2} = -1 + 4 \sin \frac{\pi-x}{4} \cdot \sin \frac{\pi-y}{4} \cdot \sin \frac{\pi-z}{4}$ ;

e)  $\cos \frac{x}{2} + \cos \frac{y}{2} - \cos \frac{z}{2} = 4 \sin \frac{\pi-x}{4} \cdot \sin \frac{\pi-y}{4} \cdot \cos \frac{\pi-z}{4}$ ;

f)  $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \operatorname{tg} \frac{y}{2} - \operatorname{tg} \frac{z}{2} = \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{y}{2} \operatorname{tg} \frac{z}{2}$ ;

g)  $\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z = 2(1 + \cos x \cos y \cos z)$ ;

h)  $\sin^2 x + \sin^2 y - \sin^2 z = 2 \sin x \sin y \cos z$ .

□ 17. Să se demonstreze identitatea:

$$\cos^3 x + \cos^3 \frac{x+2\pi}{3} + \cos^3 \frac{x+4\pi}{3} = \frac{3}{4} \cos x.$$

## 7 SUME ȘI PRODUSE TRIGONOMETRICE

□ 1. Să se demonstreze egalitățile pe domeniul de existență:

a)  $\frac{1}{\sin 2x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2x$ ;

b)  $\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 2^2 x} + \frac{2}{\sin 2^3 x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^n x$ .

□ 2. Să se demonstreze că pentru oricare  $n \in \mathbb{N}^*$ , pe domeniul de existență, au loc egalitățile:

a)  $\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \cdot \cos \frac{x}{2^3} \cdot \dots \cdot \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$ ;

b)  $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 2^2 x \cdot \dots \cdot \cos 2^{n-1} x = \frac{\sin 2^n x}{2^n \sin x}$ .

□ 3. Să se demonstreze că au loc egalitățile:

a)  $\operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{ctg} 2x = \operatorname{tg} x$ ;

b)  $\operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2^2} \operatorname{tg} \frac{x}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^n} - \operatorname{ctg} x, n \in \mathbb{N}^*$ .

□ 4. Să se demonstreze egalitățile:

a)  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\cos kx + \cos(2k+1)x} = \frac{\sin nx}{\cos(n+1)x \sin 2x}$ ;

b)  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\cos kx \cos(k+1)x} = \frac{\operatorname{tg}(n+1)x}{\sin x}$ ;

c)  $\sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$ ;

d)  $\sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$ .

□ 5. Să se verifice egalitățile:

a)  $\sin 1^\circ + \sin 3^\circ + \dots + \sin 99^\circ = \frac{\sin^2 50^\circ}{\sin 1^\circ}$ ;

b)  $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \dots + \sin(2n-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}$ .

□ 6. Să se arate că pentru  $n \in \mathbb{N}^*$  au loc egalitățile:

$$\text{a) } \sin x \sin 2x + \sin 2x \sin 3x + \dots + \sin nx \sin (n+1)x = \frac{n}{2} \cos x - \frac{\sin nx \cos (n+1)x}{2 \sin x};$$

$$\text{b) } \cos^2 x + \cos^2 2x + \dots + \cos^2 nx = \frac{n}{2} + \frac{\sin nx \cos (n+1)x}{2 \sin x};$$

$$\text{c) } \sin^2 x + \sin^2 2x + \dots + \sin^2 nx = \frac{n}{2} - \frac{\sin nx \cos (n+1)x}{2 \sin x};$$

$$\text{d) } \cos 2x + 2 \cos 4x + 3 \cos 6x + \dots + n \cos 2nx = \frac{n \sin (2n+1)x}{2 \sin x} - \frac{\sin^2 nx}{2 \sin^2 x};$$

$$\text{e) } \sin 2x + 2 \sin 4x + 3 \sin 6x + \dots + n \sin 2nx = \frac{\sin 2nx}{4 \sin^2 x} - \frac{\cos (2n+1)x}{2 \sin x}.$$

□ 7. Să se calculeze produsele:

$$\text{a) } P_n = (2 \cos x - 1)(2 \cos 2x - 1) \dots (2 \cos 2^{n-1}x - 1);$$

$$\text{b) } P_n = \left(1 + \frac{1}{\cos a}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos 2a}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{\cos 2^{n-1}a}\right);$$

$$\text{c) } P_n = \left(\cos \frac{a}{2} + \cos \frac{b}{2}\right) \left(\cos \frac{a}{2^2} + \cos \frac{b}{2^2}\right) \dots \left(\cos \frac{a}{2^n} + \cos \frac{b}{2^n}\right);$$

$$\text{d) } P_n = \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}\right) \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{4}\right) \dots \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2^n}\right).$$

### TESTE DE VERIFICARE

#### Testul nr. 1

○ 1. Să se verifice egalitățile:

$$\text{a) } \sin 5^\circ + \sin 125^\circ + \sin 245^\circ = 0;$$

$$\text{b) } \cos 5^\circ + \cos 115^\circ + \cos 235^\circ = 0.$$

○ 2. Să se simplifice:

$$\text{a) } E = \frac{\sin 27x + \sin 13x}{\cos 41x - \cos x}; \quad \text{b) } E = \frac{\sin^2 3x - \sin^2 7x}{\cos^2 3x - \cos^2 7x}.$$

○ 3. Să se arate expresia  $E = \sin^2 x + 2 \cos a \cos x \cos (a+x) - \cos^2 (a+x)$  nu depinde de  $x$ .

#### Testul nr. 2

○ 1. Să se transforme în produs:

$$\text{a) } E = \operatorname{tg} \frac{3x}{2} + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \frac{x}{2}; \quad \text{b) } E = \sin(a+b-c) - \sin 2a + \sin(a-b+c).$$

○ 2. Să se arate că:

$$\text{a) } \frac{1}{2 \sin 10^\circ} - 2 \sin 70^\circ = 1; \quad \text{b) } \frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{2}}{\cos 10^\circ} = 4.$$

○ 3. Fie  $x, y, z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  astfel încât  $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$ ,  $\operatorname{tg} y = \frac{1}{5}$ ,  $\operatorname{tg} z = \frac{1}{8}$ . Să se calculeze  $x + y + z$ .

#### Testul nr. 3

○ 1. Să se simplifice:

$$\text{a) } E = \frac{\sin 5^\circ + 2 \sin 10^\circ + \cos 75^\circ}{\cos 5^\circ + 2 \cos 10^\circ + \sin 75^\circ};$$

$$\text{b) } E = \frac{\sin 2^\circ + \sin 4^\circ + \sin 6^\circ + \sin 8^\circ}{\cos 2^\circ + \cos 4^\circ + \sin 84^\circ + \sin 82^\circ}.$$

○ 2. Să se verifice identitățile:

$$\text{a) } \sin(a-b) + \sin(b-c) + \sin(c-a) = 4 \sin \frac{a-c}{2} \sin \frac{b-a}{2} \sin \frac{c-b}{2};$$

$$\text{b) } \sin^2(a-b) + \sin^2(b-c) + \sin^2(c-a) + 2 \cos(a-b) \cos(b-c) \cos(c-a) = 0.$$

○ 3. Să se arate că dacă  $x + y + z + t = 2\pi$ , atunci:

$$\sin x + \sin y + \sin z + \sin t = 4 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y+z}{2} \sin \frac{z+t}{2}.$$

#### Testul nr. 4

○ 1. Să se arate că dacă  $x + y = z$ , atunci:

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z - 2 \cos x \cos y \cos z = 1.$$

○ 2. Să se verifice egalitățile:

$$\text{a) } \sin^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 40^\circ = 1,5;$$

$$\text{b) } \frac{\cos 25^\circ}{\sin 70^\circ \sin 85^\circ} + \frac{\cos 70^\circ}{\sin 25^\circ \sin 85^\circ} + \frac{\cos 85^\circ}{\sin 25^\circ \sin 70^\circ} = 2.$$

○ 3. Să se arate că pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  are loc egalitatea:

$$\sin 2x + \sin 4x + \dots + \sin 2nx = \frac{\sin nx \sin (n+1)x}{\sin x}.$$

## IV. APLICAȚII ALE TRIGONOMETRIEI ÎN GEOMETRIA PLANĂ

### 1 PRODUSUL SCALAR A DOI VECTORI

- 1. Se consideră triunghiul ABC. Să se demonstreze că au loc relațiile:
- a)  $2\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2$ ;  
 b)  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ .
- 2. Să se determine produsul scalar al vectorilor:
- a)  $\vec{a}(3, 2)$ ,  $\vec{b}(2, -3)$ ; b)  $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j}$ ,  $\vec{b}(6, -2)$ ;  
 c)  $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{i} - 6\vec{j}$ .
- 3. Să se calculeze  $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c})$  și  $\vec{a}\vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$  în cazurile:
- a)  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j}$ ,  $\vec{c} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ ;  
 b)  $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$ ,  $\vec{c}(2, -1)$ ;  
 c)  $\vec{a}(2, -2)$ ,  $\vec{b}(3, 1)$ ,  $\vec{c}(1, -1)$ ;  
 d)  $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ ,  $\vec{b}(2, -1)$ ,  $\vec{c}(4, 1)$ .
- 4. Să se determine unghiul vectorilor:
- a)  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$ ;      b)  $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ ;  
 c)  $\vec{a}(4, -3)$ ,  $\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ ;      d)  $\vec{a} = \vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$ ,  $\vec{b} = \vec{i}$ ;  
 e)  $\vec{a}(\sqrt{3}, -1)$ ,  $\vec{b}(0, 2)$ ;      f)  $\vec{a} = 2\sqrt{3}\vec{i} + 2\vec{j}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$ .
- 5. Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  pentru care vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  sunt vectori ortogonali:
- a)  $\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$ ;  
 b)  $\vec{a} = m\vec{i} + 5\vec{j}$ ,  $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ ;  
 c)  $\vec{a}(2m + 1, m)$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$ ;  
 d)  $\vec{a}(m^2 - 1, 2)$ ,  $\vec{b} = 2\vec{i} - 14\vec{j}$ ;  
 e)  $\vec{a}(m + 1, m - 1)$ ,  $\vec{b}(3m - 1, -15)$ .

- 6. Se dau vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ . Să se determine valorile parametrului real  $m$  pentru care unghiul  $\alpha$  al vectorilor  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  este cel specificat:
- a)  $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$ ,  $\alpha = 45^\circ$ ;  
 b)  $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + m\vec{j}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ;  
 c)  $\vec{a}(m^2 + 1, -1)$ ,  $\vec{b}(1, m^2)$ ,  $\alpha = 45^\circ$ ;  
 d)  $\vec{a}(\sqrt{m}, 1)$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ .
- 7. Să se determine parametrii reali pentru care vectorul  $\vec{a}$  este ortogonal cu vectorii  $\vec{b}$  și  $\vec{c}$ , în situațiile următoare:
- a)  $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$ ,  $\vec{b} = m\vec{i} + \vec{j}$ ,  $\vec{c} = (m - n)\vec{i} + m\vec{j}$ ;  
 b)  $\vec{a} = 3\vec{i} + m\vec{j}$ ,  $\vec{b} = 6\vec{i} - 2n\vec{j}$ ,  $\vec{c} = (m, -3n)$ ;  
 c)  $\vec{a} = (m + n)\vec{i} - 2\vec{j}$ ,  $\vec{b} = 6\vec{i} + 12\vec{j}$ ,  $\vec{c} = 2\vec{i} - 3m\vec{j}$ ;  
 d)  $\vec{a} = m^2\vec{i} + n\vec{j}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - n\vec{j}$ ,  $\vec{c} = 2n^2\vec{i} - m\vec{j}$ .
- 8. Să se calculeze produsele  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ ,  $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$  în cazurile:
- a)  $A(2, 0)$ ,  $B(0, 3)$ ,  $C(4, 4)$ ;  
 b)  $A(-2, 1)$ ,  $B(3, -2)$ ,  $C(6, -1)$ ;  
 c)  $A(1, -3)$ ,  $B(2, 1)$ ,  $C(2, -3)$ ;  
 d)  $A(-3, -2)$ ,  $B(3, 2)$ ,  $C(2, -3)$ .
- 9. Se dau punctele  $A(m + 1, 1)$ ,  $B(2, 3)$  și  $C(4, -m)$ .
- a) Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  știind că  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{OA} \cdot \overline{OB} - 2$ .  
 b) Să se demonstreze egalitatea  $\overline{AB} \cdot \overline{OC} = \overline{AC} \cdot \overline{OB}$ .
- 10. Se consideră pătratul ABCD cu latura de lungime  $\ell = 1$ . Să se calculeze:
- a)  $\overline{AB} \cdot \overline{CD}$ ; b)  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ ; c)  $\overline{AB} \cdot \overline{BD}$ .
- 11. Se consideră hexagonul regulat ABCDEF cu latura  $AB = 1$ . Să se calculeze:
- a)  $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$ ; b)  $\overline{AB} \cdot \overline{DE}$ ; c)  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ ; d)  $\overline{AB} \cdot \overline{CD}$ ; e)  $\overline{AC} \cdot \overline{EF}$ ; f)  $\overline{AF} \cdot \overline{CD}$ .
- 12. Se consideră punctele  $A(2, 2)$ ,  $B(3, 4)$ ,  $C(-1, 3)$ . Să se calculeze:
- a)  $\overline{AB}^2$ ; b)  $(\overline{AB} - \overline{AC})^2$ ; c)  $(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})^2$ .
- 13. Se consideră vectorul  $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ . Să se determine vectorul  $\vec{b}$  știind că  $\vec{b} \cdot \vec{b} = 1$  și  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

□ 14. Se consideră punctele  $A(1, 1)$  și  $B(5, 3)$ . Să se determine punctele  $M$  de pe axele de coordonate pentru care au loc egalitățile:

- a)  $\overline{MA} \cdot \overline{MA} + \overline{MB} \cdot \overline{MB} = 36$ ;
- b)  $\overline{OA} \cdot \overline{BM} + \overline{OB} \cdot \overline{AM} = 14$ ;
- c)  $\overline{OM} \cdot \overline{AB} + \overline{MA} \cdot \overline{MB} = 14$ ;
- d)  $\overline{OA} \cdot \overline{OB} + \overline{MA} \cdot \overline{MB} = 9$ .

□ 15. Fie  $ABC$  un triunghi.

Să se arate că  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} + \overline{BA} \cdot \overline{BC} + \overline{CA} \cdot \overline{CB} = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$ .

□ 16. Se consideră triunghiul  $ABC$ . Să se arate că triunghiul este dreptunghic în  $A$  dacă și numai dacă are loc una dintre relațiile:

- a)  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{0}$ ;
- b)  $\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{AB}^2 = \overline{0}$ .

□ 17. Fie  $ABCD$  un patrulater convex. Să se arate că  $AD \parallel BC$  dacă și numai dacă  $\overline{AD} \cdot \overline{BC} = AD \cdot BC$ .

□ 18. Se consideră triunghiul  $ABC$ . Să se arate că pentru oricare punct  $O$  din plan are loc relația:  $\overline{OA} \cdot \overline{BC} + \overline{OB} \cdot \overline{CA} + \overline{OC} \cdot \overline{AB} = \overline{0}$ . (**Relația lui Euler**)

□ 19. Să se demonstreze concurența înălțimilor unui triunghi folosind relația lui Euler.

□ 20. Se consideră un patrulater convex  $ABCD$ . Să se exprime în funcție de laturi și diagonale expresia  $E = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{DA}$ .

□ 21. Fie  $D, E, F$  mijloacele laturilor  $[BC], [CA], [AB]$  ale triunghiului  $ABC$ . Să se arate că:

- a)  $\overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{BE} \cdot \overline{CA} + \overline{CF} \cdot \overline{AD} = \overline{0}$ ;
- b)  $\overline{MD} \cdot \overline{BC} + \overline{ME} \cdot \overline{CA} + \overline{MF} \cdot \overline{AD} = \overline{0}$ , pentru orice punct  $M$  din plan;
- c) mediatoarele triunghiului sunt concurente.

□ 22. Să se demonstreze folosind produsul scalar că diagonalele unui romb sunt perpendiculare.

□ 23. Fie  $ABCD$  un paralelogram,  $O$  centrul său și  $M$  un punct oarecare din plan. Să se arate că au loc relațiile:

- a)  $\overline{MA} \cdot \overline{MC} = \overline{MO}^2 - \frac{1}{4} \overline{AC}^2$ ;
- b)  $\overline{MB} \cdot \overline{MD} = \overline{MO}^2 - \frac{1}{4} \overline{BD}^2$ ;

- c)  $(\overline{MA} + \overline{MB})(\overline{MC} + \overline{MD}) = 4\overline{MO}^2 - \overline{BC}^2$ ;
- d)  $(\overline{MB} + \overline{MC})(\overline{MA} + \overline{MD}) = 4\overline{MO}^2 - \overline{AC}^2$ .

□ 24. Fie  $ABCD$  un paralelogram. Să se arate că  $AC^2 + BD^2 = 2(AD^2 + AB^2)$ .

□ 25. Fie  $ABCD$  un patrulater convex. Să se arate că  $ABCD$  este dreptunghi dacă și numai dacă are loc una dintre relațiile:

- a)  $\overline{MA} \cdot \overline{MC} = \overline{MB} \cdot \overline{MD}$ ;
- b)  $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$  pentru oricare punct  $M$  din plan.

□ 26. Fie  $ABCD$  un patrulater convex.

- a) Să se arate că  $AC \perp BD$  dacă și numai dacă  $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ .

b) Dacă punctele  $M$  și  $N$  sunt mijloacele laturilor  $[AB]$  și  $[CD]$ , atunci  $AD^2 + BC^2 + AC^2 + BD^2 - AB^2 - CD^2 = 4MN^2$ . (**relația lui Euler**)

□ 27. Fie  $G$  centrul de greutate al triunghiului  $ABC$ . Să se arate că:

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

□ 28. Să se demonstreze folosind produsul scalar:

- a) teorema liniei mijlocii într-un triunghi;
- b) teorema catetei într-un triunghi dreptunghic;
- c) teorema înălțimii într-un triunghi dreptunghic.

□ 29. Fie  $[AD]$  bisectoarea interioară a unghiului  $\hat{A}$  în triunghiul  $ABC$ . Să se demonstreze că  $AD^2 = bc - \overline{BD} \cdot \overline{DC}$ .

□ 30. Prin mijloacele laturilor unui patrulater convex se duc perpendicularele pe laturile opuse. Să se arate că dacă trei dintre aceste perpendiculare sunt concurente, atunci toate cele patru perpendiculare sunt concurente.

## 2 TEOREMA COSINUSULUI. TEOREMA SINUSURILOR

□ 1. În triunghiul  $ABC$  se cunosc  $a = 10, b = 5, c = \sqrt{50}$ .

- a) Să se determine cosinusurile unghiurilor triunghiului.
- b) Să se calculeze  $\cos(B + C)$  și  $\sin(2A + B)$ .

□ 2. Să se arate că într-un triunghi oarecare  $ABC$  au loc relațiile:

- a)  $a = b \cos C + c \cos B$ ;

b)  $a \cos(B - C) = b \cos B + c \cos C;$

c)  $ab \cos C + ac \cos B + bc \cos A = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$

□3. Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare au loc relațiile:

a)  $(b^2 + c^2 - a^2) \operatorname{tg} A = (a^2 + c^2 - b^2) \operatorname{tg} B;$

b)  $\sin^2 A + 2 \sin B \sin C \sin A = \sin^2 B + \sin^2 C;$

c)  $b \cos C - c \cos B = \frac{b^2 - c^2}{a};$

d)  $a \sin(B - C) + b \sin(C - A) + c \sin(A - B) = 0;$

e)  $(a + b) \cos C + (b + c) \cos A + (a + c) \cos B = a + b + c;$

f)  $\frac{bc \cos A + ca \cos B + ab \cos C}{a \sin A + b \sin B + c \sin C} = R.$

□4. Să se demonstreze că triunghiul ABC este dreptunghic în A dacă și numai dacă  $\sin^2 B + \sin^2 C = \sin^2 A.$

□5. Să se arate că triunghiul ABC având laturile  $a = 82, b = 56, c = 30$  este triunghi obtuzunghic.

□6. Se consideră triunghiul ABC în care  $a = 2m + 1, b = m^2 - 1, c = m^2 + m + 1.$

a) Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  pentru care triunghiul există.

b) Să se arate că triunghiul ABC are un unghi cu măsura de  $120^\circ.$

□7. Fie ABC un triunghi. Să se arate că numerele  $a^2, b^2, c^2$  formează o progresie aritmetică dacă și numai dacă  $\operatorname{ctg} A, \operatorname{ctg} B, \operatorname{ctg} C$  sunt în progresie aritmetică.

□8. Să se determine măsura unghiului  $\hat{A}$  în triunghiul ABC știind că laturile  $a, b, c$  sunt direct proporționale cu numerele 7, 8 și 3.

□9. Să se determine unghiurile triunghiului ABC știind că are laturile sale proporționale cu numerele 2,  $\sqrt{6}$  și  $1 + \sqrt{3}.$

□10. Să se determine natura patrulaterului ABCD știind că lungimile laturilor și ale diagonalelor aparțin intervalului  $[1, \sqrt{2}].$

□11. Să se studieze un triunghi în care are loc relația  $\frac{a+c}{b} = \operatorname{ctg} \frac{B}{2}.$

□12. Fie A, B, C puncte în plan,  $B \in (AC).$  Să se arate că pentru oricare punct O din plan are loc relația  $OA^2 \cdot BC + AC^2 \cdot AB = OB^2 \cdot AC + AB \cdot BC \cdot AC.$  (Relația lui Stewart)

□13. Fie triunghiul ABC și punctele  $M, N \in (BC)$  astfel încât:

$$m(\widehat{BAM}) = m(\widehat{CAN}).$$

a) Folosind teorema sinusurilor să se demonstreze că  $\frac{BM}{CM} \cdot \frac{BC}{CN} = \frac{AB^2}{AC^2}.$

(Relația lui Steiner)

b) Ce devine relația lui Steiner pentru  $M = N?$

□14. Să se demonstreze teorema lui Menelau folosind teorema sinusurilor.

□15. Fie triunghiul ABC și  $D \in BC.$  Să se arate că  $\frac{DB}{DC} = \frac{c}{b} \cdot \frac{\sin \widehat{BAD}}{\sin \widehat{DAC}}.$

□16. Fie AD, BE, CF înălțimi în triunghiul ABC și H ortocentrul triunghiului. Să se arate că:

$$a) HA = 2R(\cos A); \quad b) HA^2 + BC^2 = HB^2 + AC^2 = HC^2 + AB^2 = 4R^2.$$

□17. Pe latura  $[BC]$  a triunghiului ABC se consideră punctul M. Dreapta AM intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în punctul N. Să se arate că raportul  $\frac{AM}{AN}$  are valoare minimă dacă  $[AM]$  este bisectoarea interioară a unghiului  $\hat{A}.$

□18. Fie ABC un triunghi și punctele  $M \in (AC), N \in (AB).$  Să se demonstreze că triunghiul ABC este dreptunghic în A dacă și numai dacă  $BC^2 + MN^2 = BM^2 + CN^2.$

□19. Se consideră un unghi  $\widehat{xOy}$  și un punct fix A pe bisectoarea interioară a acestuia. Prin A se duce o dreaptă variabilă care intersectează laturile unghiului în M și N. Să se arate că expresia  $E = \frac{1}{OM} + \frac{1}{ON}$  nu depinde de poziția dreptei.

□20. Fie pătratul ABCD și  $E \in (AC)$  cu proprietatea că  $m(\widehat{CBE}) = 30^\circ.$  Dacă F este simetricul lui E în raport cu punctul C, să se arate că triunghiul BCF este echilateral.

□21. Fie ABCD un patrulater inscriptibil. Să se arate că are loc relația:  $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$  (Teorema lui Ptolemeu)

### 3 APLICAȚII VECTORIALE ÎN GEOMETRIA PLANĂ

□1. Se consideră triunghiul ABC și M mijlocul segmentului [BC]. Să se demonstreze că are loc relația  $AM^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$ . (**Relația medianei**)

□2. Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic în A dacă și numai dacă  $2(m_A^2 + m_B^2 + m_C^2) = 3a^2$ .

□3. Să se arate că medianele unui triunghi ABC verifică relațiile:

a)  $m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ ;

b)  $m_A^4 + m_B^4 + m_C^4 = \frac{9}{16}(a^4 + b^4 + c^4)$ .

□4. Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic în A dacă și numai dacă are loc una dintre relațiile:

a)  $a = 2m_A$ ;                      b)  $m_B^2 + m_C^2 = 5m_A^2$ .

□5. Să se arate că pentru oricare punct M din planul dreptunghiului ABCD are loc relația  $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$ .

□6. Se consideră triunghiul ABC și punctul  $M \in (BC)$  astfel încât  $BM = 2MC$ . Dacă  $a = 6$ ,  $b = 8$ ,  $c = 6$  să se calculeze lungimea segmentului [AM].

□7. Fie ABC un triunghi echilateral cu lungimea laturii  $AB = a$  și  $M \in (AC)$ , astfel încât  $AM = \frac{1}{2}MC$ . Să se calculeze:

a) lungimea medianelor triunghiului BMC;

b) lungimea bisectoarei interioare a unghiului  $\widehat{BMC}$  în triunghiul BMC.

□8. Pătratele laturilor triunghiului ABC sunt în progresie aritmetică. Să se arate că pătratele medianelor triunghiului sunt în progresie aritmetică.

□9. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A. Să se determine laturile și unghiurile triunghiului știind că medianele din B și C au lungimile egale cu  $\frac{\sqrt{7}}{2}$  și  $\frac{\sqrt{13}}{2}$ .

□10. Fie triunghiul ABC în care  $AB = 34$ ,  $BC = 56$  și punctul  $M \in (AC)$  cu proprietatea că  $AM = MC$  și  $BM = 39$ . Să se afle distanța de la punctul M la dreapta BC.

□11. Să se arate că medianele din vârfurile B și C ale triunghiului ABC sunt perpendiculare dacă și numai dacă  $AB^2 + AC^2 = 5BC^2$ .

□12. Medianele unui triunghi au lungimile 13,  $\sqrt{601}$ , respectiv  $2\sqrt{61}$ . Să se determine lungimile laturilor triunghiului.

□13. Fie ABCD un paralelogram. Să se arate că dacă pentru oricare punct M din plan are loc relația  $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$ , atunci ABCD este dreptunghi.

□14. Fie E, F, G, H mijloacele laturilor pătratului ABCD. Să se arate că pentru oricare punct M din plan are loc egalitatea:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = ME^2 + MF^2 + MG^2 + MH^2 + AB^2.$$

□15. Fie ABC un triunghi echilateral și M, N, P mijloacele laturilor [BC], [AC], [AB]. Să se arate că pentru oricare punct S există relația:

$$SA^2 + SB^2 + SC^2 - SM^2 - SN^2 - SP^2 = \frac{3}{4}AB^2.$$

□16. Fie [AB] diametru în cercul  $\mathcal{C}(O, r)$  și punctele  $M, N \in (AB)$  astfel încât  $MA = NB$  și P un punct mobil pe cerc. Dreptele PM, PN intersectează cercul în punctele Q și R. Să se demonstreze că expresia  $\frac{1}{MQ^2} + \frac{1}{NR^2}$  este constantă.

□17. Fie ABCD un patrulater convex și  $M \in [AB]$ ,  $N \in [DC]$ ,  $P \in [BD]$ ,  $Q \in [AC]$ . Să se arate că au loc relațiile:

a)  $AD^2 + BC^2 + AC^2 + BD^2 = AB^2 + DC^2 + 4MN^2$ ;

b)  $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4PQ^2$ .

□18. Să se arate că patrulaterul ABCD este paralelogram dacă și numai dacă  $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$ . (**Teorema lui Apollonius**)

□19. Fie M un punct oarecare pe cercul circumscris pătratului ABCD. Să se arate că expresia  $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$  este constantă.

□20. Fie ABC un triunghi echilateral și D simetricul lui A în raport cu BC. Să se arate că pentru oricare punct M de pe cercul cu centrul D și raza AB segmentele [MA], [MB], [MC] pot fi laturile unui triunghi dreptunghic.

□21. Să se arate că în oricare triunghi ABC au loc relațiile:

a)  $l_A \leq \frac{b+c}{2}$ ; b)  $l_A + l_B + l_C \leq a + b + c$ .

□22. Fie ABC un triunghi și G centrul său de greutate. Să se arate că pentru oricare punct M din plan are loc egalitatea:

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$ . (Relația lui Leibniz)

□23. Fie ABC un triunghi și G centrul său de greutate, iar R și O, raza, respectiv centrul cercului circumscris. Să se arate că  $OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$ .

□24. Să se arate că triunghiul ABC este echilateral dacă și numai dacă:  $a^2 + b^2 + c^2 = 9R^2$ .

□25. Să se demonstreze că în triunghiul ABC, cu notațiile uzuale, au loc egalitățile:

a)  $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$ ;

b)  $GH^2 = 4R^2 - \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$ ;

c)  $O_9G^2 = \frac{1}{4}R^2 - \frac{1}{36}(a^2 + b^2 + c^2)$ , unde  $O_9$  este centrul cercului lui Euler.

□26. Să se arate că în triunghiul ABC are loc relația:  $OH^2 = R^2(1 - 8 \cos A \cos B \cos C)$ .

□27. Să se arate că triunghiul ABC este echilateral dacă și numai dacă:  $\cos A \cos B \cos C = \frac{1}{8}$ .

□28. Se consideră punctele fixe A și B. Să se determine locul geometric al punctelor M din plan pentru care suma  $MA^2 + MB^2$  este constantă.

□29. Se consideră punctele A, B, C necoliniare. Să se determine locul geometric al punctelor M pentru care suma  $MA^2 + MB^2 + MC^2$  este constantă.

□30. Se consideră triunghiul ABC. Să se determine  $M \in (AC)$  pentru care suma  $BM^2 + CM^2$  este minimă.

□31. Fie ABCD un patrulater convex. Să se arate că  $AB \parallel CD$  dacă și numai dacă  $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2AB \cdot CD$ .

□32. Să se arate că paralelogramul ABCD este dreptunghi dacă și numai dacă  $AB^2 + AD^2 = AC \cdot BD$ .

## 4 APLICAȚII TRIGONOMETRICE ÎN GEOMETRIA PLANĂ

### 4.1. REZOLVAREA TRIUNGHIURILOR

□1. În triunghiul dreptunghic ABC se cunoaște  $m(\hat{B}) = 15^\circ$  și ipotenuza  $a = 4$ . Să se determine elementele triunghiului.

□2. Să se rezolve triunghiul ABC, dreptunghic în A, în cazurile:

- a)  $a = 20, b = 10\sqrt{3}$ ;      b)  $a = 10, c = 5$ ;  
 c)  $a = 8, C = 30^\circ$ ;      d)  $a = 2\sqrt{3}, B = 60^\circ$ ;  
 e)  $b = 6, B = 60^\circ$ ;      f)  $b = 8, C = 30^\circ$ ;  
 g)  $c = 10, B = 45^\circ$ ;      h)  $a = 27, C = 45^\circ$ .

□3. Să se rezolve triunghiul ABC, dreptunghic în A, în cazurile:

- a)  $a = 10, \sin B = \frac{4}{5}$ ;      b)  $a = 20, \sin C = \frac{3}{5}$ ;  
 c)  $b = 8, \cos C = \frac{3}{4}$ ;      d)  $c = 18, \operatorname{tg} B = \frac{1}{3}$ ;  
 e)  $a = 20, \sin B + \cos C = \frac{3}{2}$ ;      f)  $b = 16, \operatorname{tg} B + c \operatorname{tg} C = 2$ .

□4. Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, și  $D \in (BC)$  astfel încât  $AD \perp BC$ . Să se completeze tabelul:

AB	AC	BC	AD	BD	DC
36		60			
	56	70			
5	12				
	27	45			
			24	18	
				36	64
			36		48
		25		9	
	120				72

□5. Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A și  $D \in (BC)$  astfel încât  $AD \perp BC$ . Să se determine lungimile segmentelor  $[AB], [BC], [AC], [AD], [BD], [DC]$  în cazurile:

- a)  $AB = 60, BD = 36$ ;      b)  $BC = 150, BD = 36$ ;

- c)  $AB = 60, AD = 48;$                       d)  $AC = 80, AD = 48;$   
 e)  $AC = 80, BD = 36;$                       f)  $BC = 100, AD = 48;$   
 g)  $BC = 50, DC = 32;$                       h)  $AC = 80, 16BD = 9CD;$   
 i)  $BC = 100, 16BD = 9CD;$                 j)  $AD = 48, 16BD = 9CD;$   
 k)  $4AB = 3AC, BD + AC = 29.$

- 6. Să se rezolve triunghiul ABC, dreptunghic în A, știind că:  
 a)  $a = 8\sqrt{3}, \hat{B} = 2\hat{C};$                       b)  $b = 12, 3\hat{B} + 2\hat{C} = 225^\circ;$   
 c)  $a + b = 2 + \sqrt{3}, \hat{C} = 30^\circ;$             d)  $a - c = 1, \hat{B} = 60^\circ;$   
 e)  $a + c = 3, a + b = 2 + \sqrt{3};$             f)  $a = 2, b + c = 1 + \sqrt{3}.$
- 7. Să se rezolve triunghiul ABC, dreptunghic în A, în cazurile:  
 a)  $a = 10, \sin B + \cos^2 C = \frac{3}{4};$   
 b)  $b = 20, \cos^2 B + 3 \sin C = \frac{7}{4};$   
 c)  $b + a = 180, \sin B = \frac{4}{5};$   
 d)  $b + c = 140, \operatorname{tg} B = \frac{4}{3};$   
 e)  $bc = 300, \operatorname{tg} C = \frac{3}{4};$   
 f)  $b + c = 10, \sin B + \sin C = \sqrt{2};$   
 g)  $b + c = 16, \cos B + \cos C = \sqrt{2};$   
 h)  $a = 10, \frac{\sin B - \cos B}{\sin B + \cos B} = 2 - \sqrt{3}.$

- 8. În triunghiul ABC, dreptunghic în A, se cunosc  $BC = 10$  și  $C = 30^\circ$ . Să se calculeze:  
 a) lungimile medianelor;  
 b) lungimile bisectoarelor.
- 9. În triunghiul ABC se cunosc  $A = 105^\circ, B = 30^\circ$ . Să se determine laturile triunghiului dacă:  
 a)  $AB = 18;$  b)  $AC = 40;$  c)  $BC = 16.$

- 10. Măsurile unghiurilor triunghiului ABC sunt proporționale cu numerele 3, 4 și 5, iar  $AC = 12\sqrt{2}$ . Să se determine lungimile laturilor și funcțiile trigonometrice ale unghiurilor.

- 11. Se consideră trapezul ABCD cu bazele AB, CD și  $AD \perp AB, AC \perp BD$ . Să se determine lungimile laturilor și diagonalelor trapezului știind că  $AB = 6\sqrt{2}$  și  $CD = 16\sqrt{2}$ .

- 12. Să se rezolve triunghiul ABC în cazurile:  
 a)  $a = 4, A = 60^\circ, B = 45^\circ;$  b)  $a = 12, B = 105^\circ, C = 15^\circ;$   
 c)  $b = 2, c = 4, A = 60^\circ;$  d)  $c = 4\sqrt{3} - 4, b = 4, A = 60^\circ;$   
 e)  $a = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}, b = 1, c = 2 + \sqrt{3};$  f)  $a = 2, b = \sqrt{2}, c = 1 + \sqrt{3}.$

- 13. Să se rezolve triunghiul dreptunghic ABC cunoscând măsura unghiului  $\hat{B}$  și suma catetelor  $AB + AC$ .

- 14. În trapezul dreptunghic ABCD, baza mare  $AB = 10$ , latura oblică BC are lungimea de 8, iar  $AC = 6$ . Să se determine perimetrul trapezului.

- 15. În triunghiul dreptunghic ABC suma catetelor este  $AB + AC = 1 + \sqrt{3}$ , iar înălțimea din vârful A are lungimea  $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Să se rezolve triunghiul ABC.

- 16. Să se rezolve triunghiul ABC, cu  $m(\hat{A}) = 90^\circ$ , știind că mediana din A are 2 cm, iar suma catetelor este egală cu  $2 + \sqrt{12}$  cm.

- 17. Patrulaterul ABCD are diagonalele [AC] și [BD] perpendiculare. Dacă  $AB = 5, BC = 4\sqrt{5}, CD = 10, AC = 11$  să se determine perimetrul patrulaterului și lungimea diagonalelor.

- 18. Să se rezolve un triunghi ABC știind că măsurile unghiurilor formează o progresie aritmetică,  $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$ , iar latura cea mai mare are 6 cm.

- 19. Să se rezolve un triunghi dreptunghic ABC în care:  
 $b - a = 8, B - A = 30^\circ, c = 8 + 4\sqrt{12}.$

### 4.2. RAZA CERCULUI ÎNSCRIS ȘI RAZA CERCULUI CIRCUMSCRIS UNUI TRIUNGHII

□20. Să se exprime în funcție de laturi, razele cercurilor înscris și circumscris ale unui triunghi echilateral.

□21. Se consideră triunghiul isoscel ABC în care  $AB = AC = 50$  și  $BC = 60$ . Să se determine razele cercurilor înscris și circumscris triunghiului ABC.

□22. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A. Să se arate că:

$$\text{a) } r = \frac{b+c-a}{2}; \quad \text{b) } 2(R+r) = b+c.$$

□23. Fie M mijlocul ipotenuzei [BC] în triunghiul ABC. Să se exprime în funcție de laturile triunghiului razele cercurilor circumscrise și înscrise triunghiurilor ABM și ACM.

□24. Fie ABC triunghi dreptunghic și [AD bisectoarea interioară a unghiului  $\hat{A}$ . Dacă  $R_1, R_2$  sunt razele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABD și ACD, să se calculeze  $\frac{R_1+R_2}{a}$ .

□25. Se consideră triunghiul isoscel ABC. Pe baza BC se ia punctul M. Să se compare razele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABM și ACM.

□26. Să se rezolve un triunghi ABC dreptunghic în A știind că raza cercului înscris este  $r = \sqrt{3} - 1$ , iar raza cercului circumscris este  $R = 2$ .

□27. Să se arate că dacă în triunghiul ABC există relația  $b+c = a+2r$ , atunci triunghiul este dreptunghic.

□28. Să se rezolve un triunghi ABC în care  $R = 8, \hat{A} = 120^\circ, \hat{B} = 45^\circ$ .

### 4.3. FORMULE PENTRU ARIA TRIUNHIULUI

□29. Să se determine aria triunghiului ABC, în cazurile:

a)  $a = 37, b = 46, \hat{C} = 60^\circ$ ; b)  $b = 28, c = 42, \hat{A} = 30^\circ$ ;

c)  $a = 8, \hat{B} = 105^\circ, \hat{C} = 45^\circ$ ; d)  $a = 3, b = 4, c = 5$ ;

e)  $a = 10, \hat{A} = 30^\circ, \hat{B} = 120^\circ$ ; e)  $a = 8, \hat{A} = 45^\circ, \hat{C} = 60^\circ$ .

□30. Câte triunghiuri sub aspect metric există dacă  $a = 13, b = 15, S = 24$ ?

□31. Să se afle aria triunghiului ABC dacă  $b = 2\sqrt{6}, a+c = 6 + \sqrt{12}$  și  $\hat{B} = \frac{\pi}{3}$ .

□32. Să se arate că într-un triunghi ABC oarecare are loc relația:

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} = \frac{1}{2Rr}.$$

□33. Fie ABC un triunghi oarecare. Să se arate că au loc relațiile:

a)  $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{p}{R}$ ;

b)  $\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{p}{4R}$ ;

c)  $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{p}$ ;

d)  $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$ ;

e)  $r = (p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}$ .

□34. Să se demonstreze că într-un triunghi ABC ascuțitunghic are loc relația:

$$\operatorname{tg} A = \frac{4S}{b^2 + c^2 - a^2}.$$

□35. Să se arate că într-un triunghi ABC au loc relațiile:

a)  $2S = R(a \cos A + b \cos B + c \cos C)$ ;

b)  $4S = b^2 \sin 2C + c^2 \sin 2B$ ;

c)  $S = r^2 \left( \operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \right)$ ;

d)  $4S = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C}$ .

□36. În oricare triunghi ABC au loc relațiile:

a)  $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$ ;

b)  $\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{4R+r}{p}$ ;

c)  $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - \frac{r}{2R}$ .

□37. Să se determine măsurile unghiurilor unui triunghi știind că:

$$S = \frac{1}{4}(a^2 + b^2).$$

□38. Dacă M este un punct pe cercul circumscris triunghiului ABC, să se arate că  $AM^2 \sin 2A + BM^2 \sin 2B + CM^2 \sin 2C = 4S$ .

□39. Să se demonstreze că într-un triunghi ABC are loc relația:  
 $a^2 \operatorname{ctg} A + b^2 \operatorname{ctg} B + c^2 \operatorname{ctg} C = 4S$ .

□40. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic. Să se arate că aria  $S'$  a triunghiului ortic este  $S' = 2S \cos A \cos B \cos C$ .

□41. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC și  $R_1, R_2, R_3$  razele cercurilor circumscrise triunghiurilor BOC, COA, AOB. Să se arate că:

$$\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{R_3^2} = \frac{4}{R^2} - \frac{R}{R_1 R_2 R_3}.$$

□42. Fie ABCD un patrulater convex și  $\{O\} = AC \cap BD$ . Să se arate că dacă  $\alpha = m(\widehat{AOB})$ , atunci aria patrulaterului este  $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$ .

□43. Să se arate că triunghiul ABC este dreptunghic în A dacă și numai dacă are loc egalitatea  $m_A^4 + m_B^4 + m_C^4 = \frac{9}{8}(a^4 - 4S^2)$ .

□44. Fie ABCD un patrulater convex în care se notează  $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, p = \frac{a+b+c+d}{2}$ . Să se arate că aria patrulaterului ABCD verifică relația:

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - 4abcd \cos^2 \frac{B+D}{2}. \text{ (Teorema lui Bretschneider)}$$

TESTE DE VERIFICARE

Testul nr. 1

- 1. Laturile unui triunghi ABC sunt  $AB = 6, BC = 10, AC = 14$ . Să se determine cel mai mare unghi al triunghiului.
- 2. În triunghiul ABC are loc relația  $b^2 = ac$ . Dacă mediana  $m_c$  este medie geometrică între a și b să se determine  $m(\widehat{C})$ .
- 3. Se consideră punctele  $M \in (AB), N \in (AC)$  pe laturile triunghiului ABC astfel încât  $AM = 3MB$  și  $AN = 2NC$ . Să se compare ariile  $S_{AMN}$  și  $S_{BMNC}$ .

Testul nr. 2

- 1. Să se arate că în oricare triunghi ascuțitunghic are loc relația:  
 $(b^2 + c^2 - a^2) \operatorname{tg} A = (a^2 + c^2 - b^2) \operatorname{tg} B$ .
- 2. Să se arate că laturile triunghiului ABC, a, b, c sunt în progresie aritmetică dacă și numai dacă numerele  $\operatorname{ctg} \frac{A}{2}, \operatorname{ctg} \frac{B}{2}, \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$  sunt în progresie aritmetică.
- 3. Să se arate că triunghiul ABC în care are loc egalitatea  $\sin A = 2 \sin B \cos C$  este isoscel.

Testul nr. 3

- 1. Să se arate că în oricare triunghi ABC are loc egalitatea:  
 $S = p^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}$ .
- 2. Să se rezolve triunghiul ABC știind înălțimile  $h_B = 60, h_C = 36$  și  $a = R \cos A$ .
- 3. Să se afle aria unui triunghi ABC știind că  $b + c = 5, A = 120^\circ$  și  $\ell_A = 1,2$ .

Testul nr. 4

- 1. Să se arate că triunghiul ABC este echilateral dacă și numai dacă  $S = \frac{2}{3} pR \sin B \sin C$ .
- 2. Să se arate că patrulaterul ABCD este pătrat dacă și numai dacă aria sa S este dată de  $16S = (AB + BC + CA + AD)^2$ .
- 3. Fie ABCD un paralelogram ale cărui diagonale fac un unghi de măsură  $\alpha = 45^\circ$ . Să se arate că aria paralelogramului este  $S = \left| \frac{AB^2 - BC^2}{2} \right|$ .

## V. PROBLEME RECAPITULATIVE DE GEOMETRIE

- R1.** Fie ABC un triunghi și  $A_1, B_1, C_1$  mijloacele laturilor  $[BC], [AC], [AB]$ . Să se arate că pentru oricare punct M din plan are loc egalitatea:  
 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}$ .
- R2.** Fie ABC un triunghi. Să se determine punctele M din plan în cazurile:  
 a)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$  are aceeași direcție cu  $\overrightarrow{BC}$ ;  
 b)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$  este coliniar cu  $\overrightarrow{AB}$ ;  
 c)  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}|$ .
- R3.** Se consideră punctele O, A, B, C necoliniare. Să se construiască punctul M în situațiile:  
 a)  $\overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{OA} + \frac{4}{5}\overrightarrow{OB}$ ;  
 b)  $\overrightarrow{OM} = 5\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OC}$ ;  
 c)  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}$ ;  
 d)  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ .
- R4.** Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  pentru care vectorii sunt coliniari:  
 a)  $\vec{a} = (m+1)\vec{i} + (m-1)\vec{j}$ ,  $\vec{b} = (m-2)\vec{i} + m\vec{j}$ ;  
 b)  $\vec{a} = m^2\vec{i} + (m-1)\vec{j}$ ,  $\vec{b} = (m+1)\vec{i} - 3\vec{j}$ .
- R5.** Fie A, B două puncte în plan.  
 a) Să se arate că există un singur punct C în plan cu proprietatea că  $2\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{BC} = \vec{0}$ .  
 b) Pentru oricare punct M din plan are loc egalitatea  $2\overrightarrow{AM} + 5\overrightarrow{BM} = 7\overrightarrow{CM}$ ?
- R6.** În reperul  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  se consideră punctele A(6, 0), B(1, 5), C(0, 4).  
 a) Să se determine coordonatele vectorilor  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ .  
 b) Să se arate că punctul  $M\left(\frac{1}{2}, 3\right)$  este egal depărtat de punctele A, B, C.  
 c) Să se arate că patrulaterul OABC este inscriptibil.
- R7.** Fie A(-1, 5), B(-2, 2), C(0, 4).  
 a) Să se determine coordonatele vectorului  $\vec{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ .  
 b) Să se afle coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

- R8.** Să se determine mulțimea punctelor M din plan, știind că:  
 a)  $\overrightarrow{OM} = (4-m)\vec{i} + (m-5)\vec{j}$ ,  $m \in \mathbb{R}$ ;  
 b)  $\overrightarrow{OM} = (3m-1)\vec{i} + \left(\frac{m}{2} + \frac{2}{3}\right)\vec{j}$ ,  $m \in \mathbb{R}$ ;  
 c)  $\overrightarrow{AM} = m\vec{i} + 3\vec{j}$ ,  $m \in \mathbb{R}$  și A(-1, 2).
- R9.** Să se determine a, b  $\in \mathbb{R}$  știind că punctele A(a+1, b), B(3a-b, 2b-1), C(2, 1), D(4, -1) sunt coliniare.
- R10.** Se consideră punctele A(2, 4), B(-m, m-2), C(6, 2). Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  pentru care dreapta OB are aceeași direcție cu vectorul  $\overrightarrow{AC}$ .
- R11.** Fie P un punct interior triunghiului echilateral ABC. Dacă D, E, F sunt proiecțiile lui P pe laturile triunghiului, să se arate că:  
 $\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PO}$ , unde O este centrul triunghiului.
- R12.** Pe laturile paralelogramului ABCD se iau punctele P, Q, R, S cu proprietatea că  $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{PB}$ ,  $\overrightarrow{BQ} = m\overrightarrow{QC}$ ,  $\overrightarrow{CR} = m\overrightarrow{RD}$ ,  $\overrightarrow{DS} = m\overrightarrow{SA}$ ,  $m \in \mathbb{R}$ . Să se demonstreze că PQRS este paralelogram.
- R13.** Se consideră punctele A, B, C, D vârfuri ale unui patrulater convex. Ce condiții îndeplinește ABCD dacă vectorii de poziție ai vârfurilor verifică relația  $\vec{r}_A + 5\vec{r}_C = \vec{r}_B + 5\vec{r}_D$ ?
- R14.** Se dau punctele fixe A și B și punctul M exterior dreptei AB. Să se arate că rezultanta vectorilor  $2\overrightarrow{MA}$  și  $5\overrightarrow{MB}$  trece printr-un punct fix.
- R15.** Să se verifice egalitățile:  
 a)  $\frac{\cos 12^\circ + \sqrt{3} \sin 12^\circ}{\cos 3^\circ - \sin 3^\circ} = \sqrt{2}$ ;  
 b)  $\frac{\cos 5^\circ + \sin 25^\circ}{\cos 25^\circ - \sin 5^\circ} = \sqrt{3}$ ;  
 c)  $\sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \sin^4 \frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$ ;  
 d)  $\cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$ ;  
 e)  $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$ ;

f)  $\frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{8};$   
 g)  $\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ = 3;$   
 h)  $\sin^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 40^\circ = \frac{3}{2}.$

R16. Să se verifice egalitățile:

a)  $\sin 4x + 2 \sin 2x = 4 \sin^2 2x \cdot \cos^2 x;$   
 b)  $(7 + \cos 4x)^2 = 32(1 + \sin^8 x + \cos^8 x);$   
 c)  $\frac{1 - 2 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} 2x}{1 + 2 \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} 2x} = \operatorname{tg}^2 x.$

R17. Să se descompună în produs:

a)  $\sin^2(x + y) - \sin^2(x - y);$   
 b)  $\sin(x + y - z) - \sin(x + y) - \sin z;$   
 c)  $\cos x + \cos y + \cos z + \cos(x + y + z);$   
 d)  $\sin(x - y) \sin(x - z) - \cos y \cos z;$   
 e)  $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z - \operatorname{tg}(x + y + z);$   
 f)  $\cos^2 x + \cos^2(x + 120^\circ) + \cos^2(x + 600^\circ).$

R18. Dacă  $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 3$ , să se calculeze valoarea expresiei:  
 $E = \operatorname{tg} 4x + 4 \operatorname{tg} 2x + 6.$

R19. Să se verifice egalitățile:

a)  $\cos^2 x - \cos^2 2x + \sin^2 3x = 2 \cos x \sin 2x \sin 3x;$   
 b)  $\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z - \sin(2x + 2y + 2z) =$   
 $= 4 \sin(x + y) \sin(y + z) \sin(z + x).$

R20. Să se aducă la o formă mai simplă:

a)  $E = \frac{\operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg} 2b - (\operatorname{ctg} 2a + \operatorname{ctg} 2b)}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b - (\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b)};$   
 b)  $E = \frac{3 + \cos 4a - 4 \cos 2a}{3 + \cos 4a + 4 \cos 2a} - \operatorname{tg}^4 a.$

R21. Să se demonstreze că expresia  $E = \frac{m + \sin 2x + m \cos 2x}{1 + m \sin 2x - \cos 2x}$  nu depinde de  $m$ .

R22. Să se demonstreze că în oricare triunghi ABC are loc egalitatea:

$$\frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin A \sin C} + \frac{\cos C}{\sin A \sin B} = 2.$$

R23. Să se rezolve în  $\mathbb{D}$  ecuațiile:

a)  $x^2 - 2x + 2 = \cos y;$   
 b)  $x^2 + 2x \sin(3y) + 1 = 0;$   
 c)  $y + \frac{1}{y} = 1 + \sin^2 x;$   
 d)  $2^x + 2^{-x} = 1 + \cos^2 y;$   
 e)  $2^{x^2} + 2^{y^2} = 1 + \sin^2 x.$

R24. Să se determine natura triunghiurilor în care au loc relațiile:

a)  $\sin B + \cos B = \sin C + \cos C;$   
 b)  $\cos 2B + \cos 2C - \cos 2A = 1;$   
 c)  $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1;$   
 d)  $1 + 8 \sin A \sin B \cos C = 0;$   
 e)  $8 \cos A \cos B \sin C = \sqrt{3}.$

R25. Să se arate că dacă în triunghiul ABC există relația  $b + c = 2a$ , atunci  
 $\operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1}{2}.$

R26. Să se arate că într-un triunghi ABC are loc relația  $\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} = \frac{1}{r}.$

R27. Să se arate că dacă între laturile triunghiului ABC există relația  $abc(a + b + c) = 16S^2$  triunghiul este echilateral.

R28. Să se arate că dacă într-un triunghi ABC au loc relațiile  $a + b = 2c$  și  $\sin A + \sin B = \sqrt{3}$ , triunghiul este echilateral.

R29. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A. Să se arate că pentru oricare punct  $M \in BC$  are loc egalitatea  $a^2 \cdot MA^2 = b^2 \cdot MB^2 + c^2 \cdot MC^2$ . (**Relația lui Van Aubel**)

R30. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A. Să se arate că dacă  $m(\widehat{B}) = \frac{\pi}{8}$ , atunci  $BC^2 \cdot AB + 4AC^3 = 3BC^2 \cdot AC$ .

R31. Fie ABC un triunghi și H ortocentrul său. Să se arate că:  $4S = a \cdot AH + b \cdot BH + c \cdot CH$ .

**R32.** Să se arate că într-un triunghi ABC au loc egalitățile:

a)  $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1;$

b)  $\frac{a}{\sin^2 \frac{A}{2}} + \frac{b}{\sin^2 \frac{B}{2}} + \frac{c}{\sin^2 \frac{C}{2}} = \frac{4pR}{r}.$

**R33.** Să se determine cosinusurile unghiurilor triunghiului ABC știind că laturile a, b, c sunt în progresie aritmetică cu rația r, raza cercului înscris.

**R34.** Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Să se arate că distanțele  $d_A, d_B, d_C$  ale punctului O la laturile triunghiului verifică egalitatea  $d_A + d_B + d_C = R + r$ . (**relația lui Carnot**)

**R35.** Să se arate că pentru oricare  $n \in \mathbb{N}$ :

a)  $\underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}_{n \text{ radicali}} = 2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}};$  b)  $\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}_{n \text{ radicali}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}.$

**R36.** Se consideră șirul  $(a_n)$  dat de relația de recurență:

$a_1 = \sqrt{2}$  și  $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, n \geq 1.$

a) Să se arate că  $(a_n)$  este monoton și mărginit.

b) Să se determine  $a_n.$

## INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

### ELEMENTE DE ALGEBRĂ

#### Capitolul I. MULȚIMI ȘI ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

##### 1. Mulțimea numerelor reale

##### 1.1. Operații algebrice cu numere reale

**3.** a)  $\frac{2}{3} + \frac{25}{3} = 9;$  b)  $\frac{11}{90}(99 - 9) = 11;$  c) 8; d)  $-\frac{1}{2}.$  **4.**  $x = 2, y = \frac{1}{2}.$  **6.**  $A = 1,$

$B = -1.$  **7.**  $E = 0.$  **8.**  $(a - 1)^2 + (b - 2)^2 = 0 \Rightarrow a = 1, b = 2$  și  $a^{2005} + (b - a)^{2005} = 2.$

**11.** a)  $(a - 5b)^2 + (a + 5)^2 = 0$  și  $a = -5, b = -1;$  b)  $(3y - x)^2 + (2x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2},$

$y = -\frac{1}{2}.$  **12.**  $r = 9 = 3^2.$  **13.**  $r = 64 = 4^3.$  **18.** a) Să amplifice cu  $(a - b)$  și se folo-

sește formula de calcul prescurtat  $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2.$  Se obține  $\frac{a^2 - b^2}{a - b}.$

b)  $A = \frac{1 - \frac{1}{a^{2^{n+1}}}}{1 - \frac{1}{a}}.$  Pentru  $a = 2 \Rightarrow A < 2.$  **21.** Se scrie  $(a + b - 3)^2 + (a - b - 2)^2 = 0$

și se obține  $a = \frac{5}{2}, b = \frac{1}{2};$  **24.**  $p_2, p_3, p_4$  sunt propoziții adevărate ( $p_3 : 2 \in \mathbb{N};$

$p_4 : \frac{5}{9} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ ) **25.**  $\frac{1}{4} \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$  **26.** 28. **27.** Se poate nota  $\sqrt{4 - x} = a, \sqrt{4 + x} = b.$

Rezultă că  $a^2 + b^2 = 8, x = \frac{b^2 - a^2}{2}, ab + 4 = \frac{(a + b)^2}{2},$  iar  $E(x) = 0.$

**28.**  $|x + y - 5| + |2x + y + 5| - |x - y - 4| + |2x - y - 5| = 11.$  **29.** Se folosesc formulele

radicalilor compuși  $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}},$  unde  $C = \sqrt{A^2 - B}.$

**30.**  $A = 10, B = 6, C = 2.$  **31.**  $a = b = 1.$  **32.**  $a = 4 - 2\sqrt{3}, b = \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$  Se obține

$-1 \in \mathbb{Q}.$  **33.**  $a = 1 + \sqrt{3}, b = 2 + \sqrt{3}.$  **34.** 0. **35.** 0. **36.** 18.

**37.** f)  $\frac{1}{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - 1} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1}{4 + 2\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1)(4 - 2\sqrt{6})}{-8} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1)(\sqrt{6} - 2)}{4}.$

**38. a)**  $(\sqrt{5}+2)^2$ ; **b)**  $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ ; **d)**  $\sqrt{2}$ . **39. a)** Se poate nota  $x+\sqrt{x^2-1}=a$  și rezultă  $a^2+1=2ax$ ,  $a^2-1=2a\sqrt{x^2-1}$  și expresia se scrie  $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ ; **b)**  $-1$ ;

**c)**  $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ; **d)**  $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ ; **e)**  $\sqrt{2x}+\sqrt{3y}$ .

**41.** Se raționalizează numitorii. **a)**  $\sqrt{n}$ ; **b)**  $1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ . **41.**  $n=441$ .

**42.**  $n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ . **43.**  $\frac{4x-5}{x+1} \in \mathbb{N}$  și  $\frac{4x-5}{x+1}$  este pătrat perfect,  $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow A = \{2\}$ .

$B = \left\{0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\}$ ;  $C = \{4\}$ ;  $D = \left\{3, \frac{3}{2}\right\}$ ;  $E = \left\{\frac{\sqrt{13}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}\right\}$ .

**44.**  $x \in \{-7, -1, 1, 3, 5, 11\}$ .

**Teste de verificare (pag. 13)**

**Testul nr. 1**

**1.**  $A = \frac{7}{9}$ ,  $B = 1$ . **2.** Notăm  $2x^2 - 3\sqrt{2}x + 1 = y$  și se obține  $(y+4)^2$ . **3.** Notând  $4x^2 + x - 1 = y$  se obține  $\frac{y-2}{y+3}$  etc. **4.**  $A = \{-1\}$ .

**Testul nr. 2**

**2.**  $\exists m \in \mathbb{N}$  astfel încât  $x^2 + 8x + 20 = m^2 \Rightarrow (x+4)^2 - m^2 = -4 \Rightarrow (x+4-m)(x+4+m) = -4$  etc. **3.** 0. **4.** Se scrie  $\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z} - \frac{z}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x} - \frac{x}{y}\right)^2 = 0 \Rightarrow x = y = z$ .

**1.2. Ordonarea numerelor reale (pag. 14)**

**46.** Se folosește inegalitatea mediilor  $m_{\text{arim}} \leq m_{\text{aritm}}$ . **47. a)** se aplică inegalitatea  $m_a \geq m_g$ . **b)** Avem  $b^2 + c^2 \geq 2bc$  de unde rezultă  $a(b^2 + c^2) \geq 2abc$ . Se scriu și relațiile analoge și se însumează. **c)** Avem  $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) \geq (a+b)ab$  și relațiile analoge. Se însumează aceste relații. **d)** Se aduce relația la forma  $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$ . **e)** Se dezvoltă  $(a+b+c)^2$  și se folosește **d)**. **f)**  $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) + 3abc \geq 3abc$ ,  $\forall a, b, c \in (0, +\infty)$ . **g)** Se poate scrie sub forma  $(a^2 + b^2)^2 - 8ab(a^2 + b^2) + 16a^2b^2 \geq 0$ .

**h)** Inegalitatea se aduce la forma  $(a-b)^2 + (3ab-1)^2 \geq 0$ . **i)** Se folosește inegalitatea  $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}}$ . **j)** În inegalitatea **f)** se ia  $c = 3$ .

**48. a)** Se adună inegalitățile  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$  și analogele. **b)** Din  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \Rightarrow \frac{a^3}{b} + ab \geq 2a^2$ . Analog,  $\frac{b^3}{c} + bc \geq 2b^2$ ,  $\frac{c^3}{a} + ac \geq 2c^2$ . Prin adunare rezultă  $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq 2(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + ac + bc) \geq a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2$ . **c)**  $ab + bc + ca = \frac{(a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2} = \frac{(a+b+c)^2 - 1}{2} \geq -\frac{1}{2}$ . Din **47 d)**  $\Rightarrow ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2 = 1$ .

**49. a)** Cu inegalitatea mediilor avem:  $\sqrt{a_k(a_1 + \dots + a_{k-1} + a_{k+1} + \dots + a_n)} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{2} = \frac{1}{2}$ ,  $k = \overline{1, n}$  și se însumează. **b)** Inegalitatea mediilor conduce la  $\frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} \leq \frac{1}{2} \sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{1}{4}(a_1 + a_2)$  și analogele, după care se însumează. **c)** Scriem  $\sqrt{\frac{x_2 + x_3 + \dots + x_n}{x_1}} = \sqrt{\frac{1-x_1}{x_1}} \leq \frac{1}{2x_1}$  și analogele, după care se însumează.

**50.** Se folosește  $\sqrt{a_i a_j} \leq \frac{a_i + a_j}{2}$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  și se însumează.

**51. a)** Avem  $b(a^2 + c^2) + c(a^2 + b^2) + a(c^2 + b^2) = a^2(b+c) + c^2(a+b) + b^2(a+c) > a^3 + b^3 + c^3$ . **b)** Din  $a < b+c$  rezultă  $a^2 < b^2 + c^2 + 2bc \leq 2(b^2 + c^2)$ .

**53.**  $\sqrt{a+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}$ .

**54. a)** Din **47 a)** avem  $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ . Folosind  $a+b+c=1$  rezultă  $(1-c)(1-b)(1-a) \geq 8abc \Leftrightarrow ab+ac+bc - a - b - c + 1 \geq 8abc \Leftrightarrow ab+ac+bc \geq 9abc$ ,  $(2) \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$ . **b)** Din **47 e)** și ipoteză avem  $ab+ac+bc \leq \frac{1}{3}$ , iar cu  $(2)$  se obține  $9abc \leq ab+ac+bc \leq \frac{1}{3}$ , deci  $abc \leq \frac{1}{27}$ . **c)** Avem  $c = \frac{1}{ab}$  și inegalitatea se scrie  $a+b + \frac{1}{ab} \geq 3$ . Deoarece  $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{S^2}{4}$  avem  $a+b + \frac{1}{ab} - 3 = S + \frac{1}{ab} - 3 \geq S + \frac{4}{S^2} - 3 = \frac{S^3 - 3S^2 + 4}{S^2} = \frac{(S+1)(S-2)^2}{S^2} \geq 0$ .

**55. a)** Avem  $\sqrt{(5x-2)^2 + 16} + \sqrt{(y-3\sqrt{2})^2 + 1} > 4+1=5, \forall x, y \in \mathbb{R}$ .

**56.** Relația din ipoteză se scrie  $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} = 1$ . Notând  $\frac{1}{xy} = a, \frac{1}{yz} = b, \frac{1}{xz} = c$ , avem  $a + b + c = 1$ , iar concluzia se scrie  $36 \leq 4 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \leq 9 + \frac{1}{abc}$ . Prima inegalitate rezultă din 54 a). Pentru a doua inegalitate, fie  $S = x + y, P = xy$ . Rezultă că  $z = \frac{S}{P-1}$ . Dacă  $E = 9 + x^2 y^2 z^2 - 4(xy + xz + yz)$  cu ajutorul lui  $S$  și  $P$  avem  $E = \frac{S^2(P-2)^2 + (P-3)^2}{(P-1)^2} \geq 0$ .

**57.** Se folosește inegalitatea  $\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$  și 47 e).

**58.** Se notează  $a = \sqrt{\frac{x}{z}}, b = \sqrt{\frac{y}{x}}, c = \sqrt{\frac{z}{y}}$ . Rezultă că  $abc = 1$  și conform problemei 54 c),  $a + b + c \geq 3$  sau  $\sqrt{\frac{x}{z}} + \sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{\frac{z}{y}} \geq 3$ , deci  $x\sqrt{y} + y\sqrt{z} + z\sqrt{x} \geq 3\sqrt{xyz}$ , (1). Deoarece  $x+1 \geq 2\sqrt{x}, y+1 \geq 2\sqrt{y}, z+1 \geq 2\sqrt{z}$  rezultă că  $x(y+1) + y(z+1) + z(x+1) \geq 2x\sqrt{y} + 2y\sqrt{z} + 2z\sqrt{x} \stackrel{(1)}{\geq} 6\sqrt{xyz}$ .

**59. a)** Se aplică  $m_g \leq m_a$  pentru  $x$  și 1. **b)**  $\sqrt{\frac{1-x}{x}} = \sqrt{\frac{x(1-x)}{x^2}} = \frac{1}{x} \sqrt{1-x} \leq \frac{1}{x}$ .  $\frac{x+(1-x)}{2} = \frac{1}{2x}$ . **60.**  $m_g \leq m_a$ . Rezultă că  $\sqrt{3a+1} + \sqrt{3b+2} + \sqrt{3c+3} \leq \frac{3a+2}{2} + \frac{3b+3}{2} + \frac{3c+4}{2} = \frac{3+9}{2} = 6$ . **61.** Se procedează ca la 60. **62.** Se folosește inegalitatea  $\frac{\sqrt{ab}}{a+b} < \frac{1}{2}, \forall a, b \in (0, +\infty)$ . **63.** Se folosește inegalitatea mediilor:  $1 + a_i \geq 2\sqrt{1 \cdot a_i}, i = \overline{1, n}$  și se înmulțesc relațiile. **64.** Cu inegalitatea mediilor avem:

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2^n \left[ \left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^n + \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^n \right] \geq 2^{n+1}. \text{ S-a folosit și } x + \frac{1}{x} \geq 2, \forall x > 0.$$

**66.** Avem relațiile:  $0 < \frac{x}{x+y+z+y} < \frac{x}{x+z+t} < \frac{x}{x+z}; 0 < \frac{y}{x+y+z+t} < \frac{y}{x+y+t} < \frac{y}{y+t}; 0 < \frac{z}{x+y+z+y} < \frac{z}{x+y+z} < \frac{z}{x+z}; 0 < \frac{t}{x+y+z+t} < \frac{t}{y+z+t} < \frac{t}{y+t}$ .

Prin însumare se obține  $1 < s < 2$  unde  $s$  este suma din enunț. Rezultă  $s \notin \mathbb{N}$ .

**68.** Inegalitatea se aduce la forma  $(x-1)(y-1)(z-1) \leq 0, x, y, z \in \mathbb{N}$ . Se obține  $x=1$  sau  $y=1$  sau  $z=1$  etc. **69.** Membrul întâi al relației se scrie:  $\sqrt{(a-6)^2 + 4} +$

$+\sqrt{(b-3\sqrt{3})^2 + 1} + \sqrt{(c-3)^2 + 16} \geq 2+1+4=7$ . Corelând cu ipoteza se obține  $a=6, b=3\sqrt{3}, c=3$  și unghiurile cu măsurile  $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ .

**Teste de verificare (pag. 17)**

**Testul nr. 1**

**1.** Se folosește inegalitatea  $2xy \leq x^2 + y^2, \forall x, y \in (0, +\infty)$ .

**2. b)**  $S_n = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{n^2 + n + 1} \right) < \frac{1}{6}$ . **3.** Expresia se scrie  $(2x-3y)^2 + (3y-4)^2 + (x-1)^2 + 3 \geq 3, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ . Minimul este 3. **4.** Avem  $a+b \geq 2\sqrt{ab}, a+c \geq 2\sqrt{ac}$  și  $\frac{\sqrt{a}}{(a+b)(a+c)} \leq \frac{1}{4\sqrt{abc}}, a, b, c \in (0, +\infty)$ . Se scriu și relațiile analoge și se însumează.

**Testul nr. 2**

**2.** Expresia se scrie sub forma  $(a^2 - 6a)(a^2 - 6a + 8) + 16 = (a^2 - 6a)^2 + 8(a^2 - 6a) + 16 = (a^2 - 6a + 4)^2 \geq 0$ . **4.** Inegalitatea se aduce la forma  $\frac{(a-1)(b-1)}{\sqrt{ab}} \geq 0, a \geq 1, 0 < b \leq 1$ . Se obține  $a=1, b \in (0, 1]$  sau  $a \in [1, +\infty), b=1$ .

**1.3. Modulul unui număr real (pag. 18)**

**70. a)**  $-\frac{4}{7}$ ; **b)** 0; **c)** 0; **d)**  $-4\sqrt{3}$ . **71. a)** 1; **b)** 0; **c)**  $4\sqrt{2}$ ; **d)**  $-\sqrt{2}$ . **72.**  $b, c \notin \mathbb{Z}$ .

**73. h)**  $x=7$  sau  $y=6$ . **i)** Condiția  $x^2 - 1 = 0$  și  $2x - 4 = 0 \Rightarrow x \in \emptyset$ . **j)**  $4x^2 - 12x + 9 = 0$  și  $25y^2 + 10y + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}, y = -\frac{1}{5}$ . **74. a)**  $x \in \{-6, 8\}$ ; **b)**  $x = -1$ ;

**c)**  $x = 2$ ; **d)**  $x \in \emptyset$ ; **e)**  $x \in \{\pm 1\}$ ; **f)**  $x \in \{-2, 1\}$ ; **g)**  $x = -1$ . **75. a)**  $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ ; **b)**  $x \in \emptyset$ ; **c)**  $-2 < 2x + 8 < 2 \Rightarrow x \in (-5, -3)$ ; **e)**  $x \in \mathbb{R}$ ; **f)**  $x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$ ; **g)**  $3x^2 - 7x + 2 = 0, x \in \left\{2, \frac{1}{3}\right\}$ ; **h)**  $2x - 5 < -1$  sau  $2x - 5 > 1$  etc. **j)**  $\emptyset$ .

**76. a)**  $n \in \{1, 2\}$ ; **b)**  $n = \sqrt{7}$ ; **c)**  $n = \sqrt{8}$ ; **e)**  $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ ; **f)**  $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ ; **g)**  $n \in \{0, 1, 2\}$ ; **h)**  $n \geq 4, n \in \mathbb{N}$ . **77. a)** Se notează  $|x| = a$ . Se obține  $a = 9$ , deci  $x \in \{\pm 9\}$ . **b)**  $x \in \{2, -4\}$ ; **c)**  $x \in \{-1, -3\}$ ; **d)**  $|3x - 1| = -1 \Rightarrow x \in \emptyset$ . **e)**  $x \in \{0, 4\}$ ; **f)** Se notează  $|4x - 3| = a$  și avem  $2a^2 - 5a + 3 = 0$  etc. **g)** Se notează  $|4 + 5x| = y$  și se obține ecuația  $2y^2 - 9y - 18 = 0$  etc.

**78. a)** Deoarece  $|x-1| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$  rezultă că  $7 - |x+4| \geq 0$  și se obține  $x \in [-11, 3]$ .

**b)** Se pun condițiile  $|4x+1|-7 < 0$  și  $2x+3 \neq 0$ . Se obține  $x \in \left(-2, \frac{3}{2}\right) \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ .

**d)** Se pun condițiile  $|3x-2|-3 \leq 0$  și  $3x-1 \neq 0$ . **79.** Pentru  $x > 4$  se obține  $2x+2^n = 40$  cu posibilitățile:  $n=1$  și  $x=19$ ;  $n=2$  și  $x=18$ ;  $n=3$  și  $x=16$ ;  $n=4$  și  $x=12$ ;  $n=5$  și  $x=4$ . Pentru  $x < 4$  se obține relația  $2^n = 32$ , deci  $n=5$  și  $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ . **80.**  $5|a|-4|b|+|a+1|-|2a+1|-|b-a| = 2a+5b$ .

**81.**  $b = -1$ . **82.**  $x = -1$ . **83.** Se folosește proprietatea  $|a| \leq c \Leftrightarrow -c \leq a \leq c$  și se însumează relațiile obținute. **84.** Egalitatea se scrie  $(2x-1)^2 + (y-2)^2 + (3z-1)^2 = 9$ , rezultă că  $|2x-1| \leq 3$ ,  $|y-2| \leq 3$  și  $x_{\min} = -1$ ,  $y_{\max} = 5$ . **85.** Se folosește inegalitatea  $|a+b| \leq |a|+|b|$  și  $|a_i| \in \{0, 1\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . **87. a)** Se folosește inegalitatea mediilor:  $|a+b|+|a-b| \leq 2\sqrt{a^2-b^2} \leq 2\sqrt{a^2+b^2}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . **88.** Se folosește că

$$|x|+|y|+|z| \geq |x+y+z| \text{ și } \left| \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right| = \left| \frac{a-b}{c} \cdot \frac{b-c}{a} \cdot \frac{c-a}{b} \right|.$$

**89.** Avem  $(ab+bc+ca) \cdot \left| 1 - \frac{1}{abc} \right| = \left| ab+bc+ca - \frac{1}{c} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right| \leq \left| ab - \frac{1}{c} \right| + \left| bc - \frac{1}{a} \right| + \left| ac - \frac{1}{b} \right|$ . **90. a)** Se efectuează înmulțirea din membrul întâi și se folosește că

$$x + \frac{1}{x} \geq 2, \forall x > 0. \text{ 91. Se folosesc inegalitățile: } |a+b| \leq |a|+|b| \text{ și } 2|ab| \leq (|a|+|b|)^2,$$

$$a, b \in \mathbb{R}. \text{ 92. } \frac{1}{|a|} + \frac{1}{|b|} + \frac{1}{|c|} = \frac{|b| \cdot |c| + |a| \cdot |c| + |a| \cdot |b|}{|abc|} \leq \frac{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2}{|abc|} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc}.$$

S-a folosit exercițiul 47 d). **94. a)** Se arată că  $-\frac{1}{a} < \frac{x+y}{1+a^2xy} < \frac{1}{a}$ . **b)** Se aplică a)

$$\text{pentru numerele reale } x, t, \text{ unde } t = \frac{x+y}{1+a^2xy} \text{ și } |t| < \frac{1}{a}, |x| < \frac{1}{a}.$$

**Testul nr. 1**

**1. a)** Se obține  $|x|=4$ . Rezultă  $x \in \{-4, 4\}$ . **b)**  $3-|6x-4| > 0 \Rightarrow |6x-4| < 3 \Rightarrow -3 < 6x-4 < 3 \Rightarrow \frac{1}{6} < x < \frac{7}{6}$ . Deoarece  $x \in \mathbb{Z}$  se obține soluția  $x=1$ . **c)**  $|x| \leq 4$ ,  $x \in \mathbb{Z}$ . **2.** Egalitatea se scrie sub forma  $(x-1)^2 + (2y-3)^2 + (3z+1)^2 = 1 \Rightarrow |x-1| \leq 1$ ;

$|2y-3| \leq 1$ ;  $|3z+1| \leq 1$ . Se obține  $0 \leq x \leq 2$ ;  $1 \leq y \leq 2$ ;  $-\frac{2}{3} \leq z \leq 0$ . Prin adunare se

obțin inegalitățile cerute. **3.** 10. **4.**  $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \sqrt{\frac{(ab+ac+bc)^2}{a^2b^2c^2}} = \frac{|ab+ac+bc|}{|abc|} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right|.$

**Testul nr. 2**

**1.** Se procedează ca la exercițiul 94. **2.**  $\left| \frac{a}{b+c} \right| = \frac{|a|}{|b+c|} \geq \frac{|a|}{|b|+|c|} \geq \frac{|a|}{|a|+|b|+|c|}.$

Analog se scriu celelalte două module și se însumează. **3.** Se obține  $|x-3|=6$  cu soluția  $x \in \{-3, 9\}$ . **4.**  $E = |x+1|+|x-2|+2|x-2|+2|x+1| = 9.$

**1.4. Aproximări prin lipsă sau prin adaos (pag. 23)**

**95. a)**  $x = 2,403571 \Rightarrow x_2 = 2,40$ ,  $x_3 = 2,403$ ,  $x_4 = 2,4035$ .  $y = -2,413256 \Rightarrow y_2 = -2,41$ ,  $y_3 = -2,414$ ,  $y_4 = -2,4133$ . **96. a)**  $x = 4,02872 \Rightarrow x_1 = 4,1$ ,  $x_3 = 4,029$ ,  $x_4 = 4,0288$ . **b)**  $y = -\frac{2140238}{10^5} = -21,40238 \Rightarrow y_1 = -21,4$ ,  $y_3 = -21,402$ ,  $y_4 = -21,4023$ . **97.**  $x = 4,245982 \Rightarrow x_2 = 4,24$ ,  $x_3 = 4,245$ ;  $y = -6,465248 \Rightarrow y_2 = -6,47$ ,  $y_3 = -6,466$ . **98.**  $x = \sqrt{6} = 2,4494... \Rightarrow 2,45; 2,449.$

**100. a)**  $\left| \frac{10442}{58} - 180 \right| = \frac{1}{29} < \frac{1}{10}$ . **b)**  $\left| \frac{10501}{105} - 100 \right| = \frac{1}{105} < \frac{1}{100}$ . **101.** Se arată că

$$\left| \sqrt{3} - \frac{a+3}{a+1} \right| < |a-\sqrt{3}|; a \in \mathbb{Q}_+. \text{ 102. Se arată că } \left| \frac{\sqrt{7}}{3} - \frac{9b+7}{9(b+1)} \right| < \left| \frac{\sqrt{7}}{3} - b \right|; b \in \mathbb{Q}_+.$$

**105. a)** Dacă  $\sqrt{2} < a$ , atunci  $\frac{1}{a} < \frac{1}{\sqrt{2}}$  și  $\frac{2}{a} < \frac{2}{\sqrt{2}}$ , deci  $\frac{2}{a} < \sqrt{2} < a$ . **b)** Dacă  $0 < a < \sqrt{2}$ , atunci  $\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{a}$  și  $\frac{2}{\sqrt{2}} < \frac{2}{a}$ , deci  $a < \sqrt{2} < \frac{2}{a}$ .

**1.5. Parte întregă. Parte fracționară (pag. 25)**

**108. a)**  $x = \frac{5}{3}$ ; **b)**  $y = -7 + \frac{17}{30}$ . **109.**  $A = \sqrt{n-1}+1$ ;  $B = \sqrt{n-1}-1$ .

$$\text{110. } a_n = n+3 - \frac{3}{n}, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, [a_n] = \begin{cases} 3, n=2 \\ 5, n=3 \\ n+3, n \geq 4 \end{cases}; \{a_n\} = \begin{cases} \frac{1}{2}, n=2 \\ 0, n=3 \\ 1 - \frac{3}{n}, n \geq 4 \end{cases}.$$

**111.**  $b_n = \frac{n+4}{n+5}$ ,  $n = 795$ .

**112. a)**  $n^2 \leq n^2 + n \leq (n+1)^2 \Rightarrow \lceil \sqrt{n^2 + n} \rceil = n$ ; **b)**  $(n+1)^2 < n^2 + 3n < (n+2)^2$ ,  $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lceil \sqrt{n^2 + 3n} \rceil = n+1$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pentru  $n=0$  partea întreagă este zero.

**c)** Se folosește inegalitatea  $(n+2)^2 \leq n^2 + 6n < (n+3)^2$ ,  $n \geq 2$ . **d)**  $\lceil \sqrt{n^2 + 5n} \rceil = n+2$ ,  $n \geq 4$ . **e)**  $\lceil \sqrt{4n^2 + n} \rceil = 2n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . **113. a)**  $(\sqrt{2} + \sqrt{2n^2 + 1})^2 = 2n^2 + 3 + \sqrt{16n^2 + 8}$  și  $\lceil \sqrt{16n^2 + 8} \rceil = 4n$ ,  $n \geq 1$ . Se obține partea întreagă egală cu  $2n^2 + 4n + 3$ ,  $n \geq 1$ . **b)**  $\lceil (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 \rceil = \lceil 2n+1 + \sqrt{4n^2 + 4n} \rceil = 4n+1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**114.** Se folosește  $\lceil \sqrt{n(n+1)} \rceil = n$ ,  $n = \overline{1, 50}$  și rezultă egalitatea  $1+2+3+\dots+50 = 1275$ . **115.** Avem  $\lceil \sqrt{n^2 + k} \rceil = n$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Se obține suma egală cu  $n^2$ .

**116. a)** Vezi indicația de la 114. **b)**  $\lceil \sqrt{1} \rceil + \lceil \sqrt{2} \rceil + \lceil \sqrt{3} \rceil + \dots + \lceil \sqrt{n^2 - 1} \rceil = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \dots + (n-1)(2n-1) = \sum_{k=1}^{n-1} k(2k+1) = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}$ . **117.**  $A = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \dots \cdot \frac{99 \cdot 101}{100^2} = \frac{101}{200} = 0,505$  etc. **118. a)**  $a = \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ ,  $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a \in (0, 1)$  și  $[a] = 0$ ,  $\{a\} = a$ . **b)**  $a = \frac{4}{5} \Rightarrow n = 24$ .

**119. a)**  $9n^2 < 9n^2 + 3n < 9n^2 + 6n + 1$ ,  $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow [x] = 3n$ .  $x = \sqrt{9n^2 + 3n} < \sqrt{9n^2 + 3n + \frac{1}{4}} = 3n + \frac{1}{2} = [x] + \frac{1}{2} \Rightarrow x - [x] < \frac{1}{2} \Rightarrow \{x\} < \frac{1}{2}$ . **b)**  $[y] = 2n$ . Se arată că  $y < \sqrt{4n^2 + n + \frac{1}{16}} = 2n + \frac{1}{4} = [y] + \frac{1}{4}$ . Rezultă că  $\{y\} \leq \frac{1}{4}$ . **120.** 42. **121. a)** Fie  $x = [x] + \alpha$ ,  $y = [y] + \beta$ , cu  $\alpha, \beta \in [0, 1)$ .  $[x+y] = \lceil [x] + [y] + \alpha + \beta \rceil = [x] + [y] + [\alpha + \beta]$ . Deoarece  $[\alpha + \beta] \in \{0, 1\}$  rezultă că  $[x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1$ . **b)**  $[x-y] = [x] - [y] + [\alpha - \beta]$ . Deoarece  $[\alpha - \beta] \in \{-1, 0\}$  rezultă  $[x] - [y] - 1 \leq [x-y] \leq [x] - [y]$ . **122. a)** Din definiția avem  $[x] \leq x$ ,  $[y] \leq y$ . Deoarece  $x, y \in [0, +\infty)$  rezultă că  $[x] \cdot [y] \leq xy$  și  $\lceil [x][y] \rceil \leq [xy]$ . Așadar  $[xy] \geq [x][y]$ . **b)** Fie  $x, y \in (-\infty, 0) \Rightarrow [x][y] \geq xy \Rightarrow \lceil [x][y] \rceil \geq [xy] \Rightarrow [xy] \leq [x][y]$ . **123.** Este generalizarea exercițiului 121 a).

**124. a)** Avem  $[x] \leq x$  și  $x = [x] + \{x\}$ . Rezultă că  $nx \geq n[x]$  și  $nx = n[x] + n\{x\}$ .  $n[x] = [n[x]] \leq [nx] = [n[x] + n\{x\}] \leq n[x] + n\{x\} \leq n[x] + n - 1$ . **b)**  $[-x] \leq -x \Rightarrow n[-x] \leq -nx \Rightarrow [n[-x]] \leq [n-x] \Rightarrow n[-x] \leq [-nx] \leq -[nx] \stackrel{a)}{\leq} -n[x]$ . **c)** Din a) avem

$k[x] \leq [kx] \leq k[x] + k - 1$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ . Însușind aceste inegalități pentru  $k \in \{1, \dots, n\}$  se obține concluzia. **125. a)** Deoarece  $\{x\} \in (0, 1)$ , rezultă că  $\lceil \{x\} \rceil = \{x\}$ . **b)**  $\{-x\} = -x + [-x] = -x - (-[x] - 1) = -x + [x] + 1 = 1 - \{x\}$ , pentru  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . **c)** Avem  $0 < \{x\} < 1 \Rightarrow 1 - \{x\} \in (0, 1) \Rightarrow \lceil 1 - \{x\} \rceil = 1 - \{x\}$ . **126. a)** Dacă  $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow [n] + [-n] = n + (-n) = 0$ . Reciproc, presupunem că  $[n] + [-n] = 0$ . Dacă  $n \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [n] < n$  și  $[n] + [-n] < n + (-n) = 0$ , ceea ce contrazice ipoteza. Așadar  $n \in \mathbb{Z}$ . **b)** Se știe că dacă  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , atunci  $[-a] = -[a] - 1$  sau  $[n-a] = [n-[a]-\{a\}] = n - [a] + [-\{a\}] = n - [a] - 1$ . **c)**  $\{n-a\} = n - a - [n-a] = n - a - n - [-a] = -a - [-[a] - 1] = -a + [a] + 1 = 1 - \{a\}$ . Dar  $1 - \{a\} = \{-a\}$  conform exercițiului 125 b).

**127.** Fie  $a = \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$  și  $b = \sqrt{4n+2}$  și egalitatea se scrie  $\frac{[a]}{[b]} + \frac{[b]}{[a]} = 2$ , ceea

ce conduce la  $[a] = [b]$ . Deoarece  $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \leq \sqrt{4n+2}$ ,  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow [a] \leq [b]$ . Totodată  $\sqrt{4n+2} \leq \sqrt{4n+1} + 1$  și  $\sqrt{4n+1} \leq \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ . Așadar  $\sqrt{4n+1} \leq a \leq b \leq \sqrt{4n+1} + 1$ , de unde se obține că  $[a] = [b] = \lceil \sqrt{4n+1} \rceil$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  și egalitatea are loc.

**128. a)**  $[x+1] = 4 \Leftrightarrow [x] + 1 = 4 \Leftrightarrow [x] = 3 \Leftrightarrow x \in [3, 4)$ .

**e)** Din proprietățile părții întregi avem  $2 - x \leq x < 3 - x$  și  $2 - x \in \mathbb{Z}$ . Rezultă că  $x \in [1, \frac{3}{2})$  și  $x = 2 - k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Se obține  $k = 1$  și  $x = 1$ . **g)** Avem  $\frac{x+20}{7} \leq \frac{x+13}{6} < \frac{x+20}{7} + 1$  și  $\frac{x+20}{7} = k \in \mathbb{Z}$ . Se obține  $x \in [29, 71)$ ,  $x = 7k - 20$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , condiție

din care rezultă  $k \in \{7, 8, \dots, 12\}$  și  $x = 7k - 20$ . **o)** Notăm  $\lceil \frac{2x+1}{3} \rceil = n \in \mathbb{Z}$ .

Rezultă sistemul de ecuații  $\begin{cases} n \leq \frac{2x+1}{3} < n+1 \\ n \leq \frac{3x+1}{4} < n+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3n-1}{2} < x < \frac{3n+2}{2} \\ \frac{4n-1}{3} \leq x < \frac{4n+3}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3n-1}{2} < \frac{4n+3}{3} \\ \frac{4n-1}{3} < \frac{3n+2}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow n \in \{-7, -6, \dots, 8\}$ . Avem  $x \in \left[\frac{3n-1}{2}, \frac{3n+2}{2}\right] \cap \left[\frac{4n-1}{3}, \frac{4n+3}{3}\right]$  pentru

fiecare  $n$  determinat. **r)** Avem  $\frac{5x+1}{3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}$  astfel încât  $\frac{5x+1}{3} = n$ . Ecuația

se scrie  $\lceil \frac{2n+1}{5} \rceil + \lceil \frac{4n+7}{10} \rceil = n$ , (1). Din definiția părții întregi avem

$\frac{2n+1}{5} - 1 < \lceil \frac{2n+1}{5} \rceil \leq \frac{2n+1}{5}$  și  $\frac{4n+7}{10} - 1 < \lceil \frac{4n+7}{10} \rceil \leq \frac{4n+7}{10}$ . Prin adunare și

cu relația (1) avem:  $\frac{8n-11}{10} < n \leq \frac{8n+9}{10}$  și se obține  $n \in \{-5, -4, \dots, 4\}$ , iar

$x = \frac{3n-1}{5}$ . **129. a)** Avem inegalitatea  $[x] \leq x, \forall x \in \mathbb{D} \Rightarrow [x^2] \leq x^2, \forall x \in \mathbb{D} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = 4x^4 - 4[x^2] + 1 \geq 4x^4 - 4x^2 + 1 = (2x^2 - 1)^2 \Rightarrow x \in \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$ . **b)** Se procedează ca la a) și rezultă  $x = 2$ .

**130.** Fie  $5x^2 - 10x = y$ . Ecuația devine  $[y-12] = [-y-12] \Rightarrow [y] = [-y] \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x \in \{0, 2\}$ .

**131.** Se arată că  $f(3k) = (3k+1)^2, f(3k+1) = (3k+2)^2, f(3k+2) = (3k+3)^2$ . Deci  $f(n) = (n+1)^2$ .

**132.** Se calculează  $f(5k+r), r = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

**133.** Se consideră: **a)**  $n = 2k, n = 2k+1$ ; **b)**  $n = 4k+r, r = \{0, 1, 2, 3\}$ .

**134.** Pentru  $n = 2k$  suma este  $0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \dots + 2(k-1) + k = k^2$ , iar pentru  $n = 2k+1$  suma este  $0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \dots + 2 \cdot k = k(k+1)$ .

**135. a)** Vezi problema 131. **b)**  $f(2k) = 2k(2k+1), f(2k+1) = (2k+1)(2k+2)$  nu sunt pătrate fiind produs de două numere consecutive. **c)**  $f(p) = 3p+6$  și  $f(p+1) = 3p+12$  pentru  $p > 9$ . Dacă  $3p+6 = a^2, 3p+12 = b^2$ , atunci  $b^2 - a^2 = 6, a, b \in \mathbb{N}$ , ceea ce nu se poate. Așadar  $p \leq 9$ . Se constată că numai  $p = 3$  verifică enunțul.

**136.** Se notează membrul stâng cu  $f(n)$ . Avem  $f(n+1) - f(n) = 1, \forall n, p \in \mathbb{N}^*$ . Șirul  $(f(n))$  este progresie aritmetică cu  $f(1) = 1$  și rația  $r = 1$ . Rezultă că  $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

**137.** Pentru  $n = 0$  se obține  $p > 2$ , iar pentru  $n = 1$  se obține  $p = 3$ . Se arată că  $p = 3$  verifică egalitatea pentru orice  $n \in \mathbb{N}$  (problema 136).

**138.** Pentru  $n = 0$  se obține  $q \geq 2, r \geq 3$ . Pentru  $n = 1$  se obține  $\left[\frac{1}{p}\right] + \left[\frac{2}{q}\right] + \left[\frac{3}{r}\right] = 1$ . Rezultă că  $p, q, r$  nu sunt simultan mai mari decât 3 și că cel puțin unul este mai mic sau egal cu 3. Dacă  $r = 3$  se obține  $\left[\frac{1}{p}\right] + \left[\frac{2}{q}\right] = 0$  și  $p \geq 2, q \geq 3$ .

Dacă  $q = 3$  se obține  $\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n+1}{3}\right] + \left[\frac{n+2}{3}\right] = n$ , ceea ce are loc numai pentru  $p = 2$ . Așadar o soluție este  $p = q = r = 3$ . Fie  $r = 3$  și  $q > 3$ . Avem egalitatea  $\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n+1}{q}\right] + \left[\frac{n+2}{3}\right] = n$ , (1), care pentru  $n = 1$  implică  $p = 2$ . Relația (1) se scrie  $\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+1}{q}\right] + \left[\frac{n+2}{3}\right] = n$  și se constată că nu are loc pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

Analizăm cazul  $r > 3$ . Pentru  $n = 1$  se obține  $\left[\frac{1}{p}\right] + \left[\frac{2}{q}\right] = 1$ , de unde  $p = 1, q > 2$

sau  $p > 1, q = 2$  care se constată că nu verifică egalitatea pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ . Rămân de analizat cazurile  $r = 1, r = 2$  care nu conduc la soluții pentru egalitatea din enunț. **139. a)** Se ia  $n = 0, n = 1$ , se scad egalitățile obținute și rezultă  $2a + b = 3, a, b \in \mathbb{N}, a \neq 0$ , cu soluția  $a = b = 1$ , iar  $x \in \{0, 1\}$ .

**140.** Din relația lui Hermite  $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] + [2x]$  și ecuația dată se obține  $[x] = \left[x - \frac{1}{2}\right]$  cu

soluția  $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left[n + \frac{1}{2}, n + 1\right)$ .

**141.** Se folosește relația lui Hermite din care se scoate  $\left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x] - [x]$ . Se dă lui  $x$  valorile  $\frac{n}{2}, \frac{n}{2^2}, \dots, \frac{n}{2^{k+1}}, \dots$  și se

însurează egalitățile găsite. Începând de la un anumit  $k, \left[\frac{n}{2^{k+1}}\right] = 0$ .

### 1.6. Operații cu intervale de numere reale (pag. 30)

**142. a)**  $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}$ ; **c)**  $-\frac{1}{2} < z < \frac{1}{2}$ ; **e)**  $n \leq 0$ ; **i)**  $c \leq -3$ ; **g)**  $z > 0$ .

**147. a)**  $x = -5, y = 7$ ; **b)**  $x = -8, -6 \leq y \leq -3$ .

**150. a)**  $x = 2, y = \frac{23}{10}$ ; **b)**  $x = -1, y \geq -4$ ; **c)**  $x \leq 3, y \geq 5$ .

**153. a)** Pentru  $a = 1 \Rightarrow J = [-3, 5]$  și se efectuează operațiile. Pentru  $a \geq 2, a \in \mathbb{N} \Rightarrow \Rightarrow -\frac{5}{3} < -\frac{3}{a} < 3 < 5$  și se pot efectua ușor operațiile. **b)** Pentru  $x \in \{1, 2, 3\} \Rightarrow \Rightarrow K \cap \mathbb{Z} = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ . Pentru  $a \geq 4, a \in \mathbb{N} \Rightarrow K \cap \mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3\}$ .

**154.** Se folosește inegalitatea mediilor  $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \forall a, b \in (0, +\infty)$ .

**155. b)** Din inegalitățile  $2 < 2 + \frac{1}{n} \leq 3 < 4 \leq 5 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$  rezultă  $I_n \cap \mathbb{N} = \{3, 4\}$ .

**156. c)** Au loc inegalitățile  $2 < 2 + \frac{1}{n} \leq 3 < 6 \leq 7 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$ . Rezultă că  $I_n \cap \mathbb{N} = \{3, 4, 5, 6\}$ . **157. a)** Din condiția  $1 \in I \cap (a, +\infty) \Rightarrow a < 1 < a^2 \Leftrightarrow a < -1$ . **b)** Din condiția  $2 \leq a < 3 < a^2$ , rezultă  $a = 2$ . **158.** Se folosește inegalitatea mediilor:

**a)**  $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ ; **b)**  $(\sqrt{ab}, b]$ ; **c)**  $\left[a, \frac{2ab}{a+b}\right]$ ; **d)**  $\left(\frac{a+b\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}, \frac{a+b\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)$ .

**159. a)**  $x = -1, y \geq 4$ ; **b)**  $x \leq -2 \leq y < 4$ ; **c)**  $x \leq 0, y \geq 3$ ; **d)**  $x < y \leq 3$ .

**160.** a)  $[0, x]$ ; b)  $[-x, x]$  dacă  $x \geq 1$  sau  $[-x^2, x^2]$  dacă  $0 < x < 1$ ; c)  $[-x, x]$  dacă  $x \geq 1$  sau  $[-x^3, x^3]$  dacă  $0 < x < 1$ . d)  $\left(-\frac{1}{x}, \frac{1}{x}\right)$ ; e)  $[-x+1, x+1]$  dacă  $0 < x < 1$  sau  $[0, x+1]$  dacă  $x \geq 1$ ; f)  $[3x, 4x]$ . **161.**  $\left[-\frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^2}\right]$ .

**162.** Condiția de existență a intervalelor impune  $x \geq 0$ . Dacă  $x = 0$  intersecția este  $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ . Dacă  $x \in (0, 4) \Rightarrow \frac{x+3}{2} > \frac{3x+2}{4}$  și intersecția este  $\left[\frac{x+1}{2}, \frac{3x+2}{4}\right]$ .

Dacă  $x = 4$  se obține  $\left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right]$ . Dacă  $x \in (4, +\infty)$ ,  $\frac{x+3}{2} < \frac{3x+2}{4}$  și intersecția este  $\left[\frac{x+1}{2}, \frac{x+3}{2}\right]$ .

**163.** a)  $I = [-2, 2]$ ;  $J = (-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$ ;  $K = (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$ .

**164.** a)  $I \cap \mathbb{Z} = \emptyset \Rightarrow b - a \leq 1$ . Egalitatea din enunț se scrie sub forma  $a - b + 1 = a^2 + b^2 + \frac{a}{2} - 2b + \frac{21}{16} \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}$  și  $I = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ .

b)  $\mathbb{Z} \cap K = \{1\} \Rightarrow c \in (0, 1]$ ;  $d \in [1, 2) \Rightarrow |c - d + 2| = c - d + 2$  și egalitatea se scrie  $\left(c - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(d - \frac{3}{2}\right)^2 = 0$ . Rezultă că intervalul  $K = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ .

**165.** a) Pentru  $a = 1 \Rightarrow K = (-1, 1)$  și conține un singur număr întreg. Pentru  $a \in (0, 1) \Rightarrow K = (-a, a^2)$  care conține numărul întreg zero. Pentru  $a > 1$  avem ordinea  $-a < -1 < -\frac{1}{a} < 0 < 1 < a < a^2$ . Rezultă  $K = \left(-\frac{1}{a}, a\right)$  care conține două numere întregi. Așadar  $K \cap \mathbb{Z}$  are un singur element dacă  $a \in (0, 1]$ . b) Pentru  $a > 1, K \cap \mathbb{Z}$  are mai mult de un element (vezi a). Știind că intersecția are  $n$  elemente, adică  $\mathbb{Z} \cap K = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  se impune condiția  $n-1 < a < n, n \geq 2$ .

**2. Propoziție. Predicat. Cuantificatori (pag. 34)**

**2.** a) „4 și 3,2 sunt direct proporționale cu 2 și 1,6” - adevărată; b) „2 și 1,6 sunt invers proporționale cu 4 și 5” - adevărată.

**3.**  $v(p) = 1, v(q) = 1, v(r) = 0, v(s) = 0$ .

**4.** a)  $\{2\}$ , finită; b)  $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ , adevărat; c)  $A = -2 \in \mathbb{N}$ , fals; d) adevărat;

e) adevărat; f)  $(2^3 + 1) + (2^4 + 1) + (2^6 + 1) = 91$ , adevărat; g) fals; h)  $-1002 = -2004$ ,

fals; i)  $-8^{53} > -9^{53}$ , adevărat; j)  $8 \notin \mathbb{Z}$ , fals; k)  $\frac{2004}{2005} \approx 0,999 < 0,91$ , fals.

**5.** a)  $AB = CD$ , adevărat; b) adevărat; c) fals; d) adevărat; e) dimensiunile sunt 8, 15, 14 și  $d = \sqrt{485}$ ; f)  $102 = 112$ , fals; g)  $z = \frac{3}{2}, y = 5$  și  $2x + 3y = 18$ ; propoziția este adevărată; h) ultima egalitate este falsă, deci conjuncția propozițiilor este falsă; i)  $\overline{FC} = -\frac{1}{3}\overline{FA}$ . **6.** a)  $\emptyset$ ; b)  $\{-1\}$ ; c)  $\mathbb{C}$ ; d)  $\{0\}$ .

**7.** a)  $x = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ , mulțimea de adevăr este  $\emptyset$ . b)  $\{1\}$ ; c)  $\mathbb{Z}$ ; d)  $\{-1\}$ .

**8.** a)  $\{-\sqrt{3}\}$ ; b)  $\emptyset$ ; c)  $\left\{\frac{3}{5}\right\}$ ; d)  $\{-2, 1\}$ ; e)  $\{1, 2, 4\}$ ; f)  $\frac{3}{2}, -\frac{8}{3}$ .

**9.** a)  $E = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}; \emptyset$ ; b)  $E = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, -1\}; \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ ; c)  $E = \mathbb{R} \setminus \{-4, 1\}; \emptyset$

d)  $E = \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{3}{2}\right\}; \{10\}$ . **10.** a)  $E = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}; \{6\}$ ; b)  $\mathbb{R} \setminus \{2\}; \{-1\}$ ; c)  $\mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}; \{2\}$ ;

d)  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 3\}; \{7\}$ .

**11.** a) Se pun condițiile  $6x^2 - 5x - 6 = 0$  și  $2x + 3x^2 = 0 \Rightarrow x \in \left\{-\frac{2}{3}\right\}$ ;

b)  $(-\infty, 0]$ ; c)  $\{0, 1\}$ ; d) Se notează  $y = \left|\frac{x+3}{x-2}\right|, x \neq 2, x \neq -3$  și se obține  $y \in \left\{4, \frac{1}{4}\right\}$ , apoi se determină  $x$ . e)  $\{-2\}$ ; f)  $\{0, 3\}$ .

**12.** a)  $3 - |2x + 5| \geq 0, x \in [-4, -1]$ ; b)  $x = -6$  sau  $|3x - 7| \leq 8$  și  $x \in \mathbb{Z}; x \in \{-6, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ; c)  $x \in [2, +\infty)$ ; d)  $x \in \{\pm 5, 0, 1, 2, 3\}$ ;

**13.** a)  $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ ; b)  $\{7, 1, 15\}$ ; c)  $\left[2, \frac{7}{3}\right]$ .

**14.** a)  $(2x + 1)$  divide 15  $\Rightarrow x \in \{0, \pm 1, \pm 2, -3, -8, 7\}$ ;

b)  $P_2(x): \frac{8}{x+2} \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{Z}$ . Mulțimea de adevăr se obține din condiția  $x + 2 \mid 8$  și  $x \in \mathbb{Z}$ . c)  $n$  este număr natural par,  $n \geq 6$ ; d)  $2n + 3 \mid 11n^2 + 4$  și  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in \{1, 10, 56\}$ .

**15.** a)  $(x, y) \in \{(4, 6), (11, -1), (5, 2), (7, 0), (2, -10), (-5, -3), (1, -6), (-1, -4)\}$ ;

b)  $(x, y) \in \{(15, 0), (0, -15), (8, 1), (-1, -8)\}$ ; c)  $x \in \left\{-2, \frac{2}{3}\right\}, y \in \{\pm 6\}$ ;

d)  $(x, y) \in \{(2, 3)\}$ ; e)  $(x, y) \in \left\{\left(-\frac{3}{2}, 1\right)\right\}$ .

**16. b)**  $x \in \{-1\}$ ,  $y \in \{1, 5\}$ . **17. b)**  $n \in \{0, -2, 4, -6\}$ . **18.**  $(\exists x)p(x)$  este adevărată,  $x \in \left\{-\frac{7}{10}, 10\right\}$ ;  $(\forall x)\bar{p}(x)$  este falsă;  $(\exists x)(\bar{p}(x))$  este adevărată,

$$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{7}{10}, 10\right\}.$$

**19. c)** Din condițiile  $a \in (-2, 5)$ ,  $b \in (-3, 4)$  rezultă că  $-5 < a+b < 9$  și ca urmare  $a+b+5 > 0$ ,  $a+b-9 < 0$  și  $|a+b+5| + |a+b-9| = 14 \in \mathbb{N}$ .

**20.** Predicatele se scriu astfel:

$p(x, y)$ : „ $x^2 + (y-2)^2 + 12 > 0$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ ”;  $q(x, y)$ : „ $(a-b)^2 + (2b-1)^2 = 0$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ ” și rezolvarea se obține ușor.

**21. a)** Expresia se scrie  $3^n \cdot 12 \cdot 19, \forall n \in \mathbb{N}$ , deci propoziția este adevărată.

**b)** Notăm  $n^2 - 3n + 1 = y$  și expresia se scrie  $(y+1)^2$ . **c)**  $n = 1$ ;

**d)**  $3n+1 \mid 4n^2+3n-1 \Rightarrow 3n+1 \mid 3(4n^2+3n-1) = 4n(3n+1)+5n-3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3n+1 \mid 5n-3 \Rightarrow 3n+1 \mid 3(5n-3) = 5(3n+1)-14 \Rightarrow 3n+1 \in D_{14}$ . Împreună cu condiția  $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$  se obține  $n = -5$ . **e)** Expresia are valoarea 2,  $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ .

**f)** Se arată că  $\sqrt{n-\sqrt{2n-1}} + \sqrt{n+\sqrt{2n-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2n-1}-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2n-1}+1) = \sqrt{4n-2} \in (\sqrt{4n-3}, \sqrt{4n-1})$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ .

**22. a)** Relația se scrie:  $(3x-2)(y-4) = -42$  și se găsește de exemplu  $x = 3$ ,  $y = -2$  care o verifică. **b)** Un exemplu:  $m = -4$ ,  $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n^2 + 3 > 0$ ; **c)** Relația se scrie  $(x-1)^2 + (2y-3)^2 + (3z-1)^2 \geq 0$  și este adevărată pentru oricare  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .

**d)** Relația se scrie sub forma  $x(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2 \geq 0$ ,  $x, y, z \in [0, +\infty)$  care este adevărată. **e)** Avem că  $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 3 + \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) \geq 3+2+2+2=9$ ,  $\forall x, y, z \in (0, +\infty)$ .

**Teste de verificare (pag. 40)**

**Testul nr. 1**

**1.** propoziții: a), b), e). **2.** p - falsă, q - adevărată ( $x = 2, y = 1, z = 7$ ).

**3.**  $\{15^\circ, 75^\circ, 90^\circ\}$ .

**Testul nr. 2**

**1.** p: „ $a = \frac{3}{5}$  este subunitar”, adevărată,

q: „ $2(\sqrt{7}-\sqrt{3}) + (2\sqrt{3}-3) - (2\sqrt{7}-5) = 2 \notin \mathbb{N}$ ”, falsă.

**2. a)**  $\{6\}$ ; **b)** Condiții:  $8,8(3)x - 12,(4)y + 59 = 0$  și  $2,5x - 13,(2)y + 104 = 0$ . Se obține  $(x, y) \in \{(6, 9)\}$ . **3. a)** pentru oricare  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p(n)$  este propoziție adevărată; **b)** adevărată; **c)** falsă.

**4. Tipuri de raționamente logice (pag. 52)**

**4.2. Probleme de numărare (pag. 59)**

**42.**  $\text{card}(B) = 11$ . **43.** 154. **44.** 68. **45.** 9, 15. **46.** 5. **47.** 24. **48.** 9. **49.** 136.

**50.** 18. **52. a)**  $\left[\frac{1000}{3}\right] = 333$ . **53. a)**  $\left[\frac{10000}{2}\right] + \left[\frac{10000}{3}\right] - \left[\frac{10000}{2 \cdot 3}\right]$ .

**54. a)**  $\left[\frac{1250}{2}\right] + 1$ ; **b)**  $\left[\frac{1250}{4}\right] + 1$ ; **c)**  $\left[\frac{1250}{6}\right] + 1$ . **55.**  $\left[\frac{n}{\text{c.m.m.m.c.}(a, b, c)}\right] + 1$ .

**58.**  $8100 = 3^4 \cdot 2^2 \cdot 5^2$ ,  $n = 8100 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 2160$ .

**59. a)**  $1+2+\dots+24 = 300$ ; **b)**  $2 \cdot 300 = 600$ .

**60.**  $\left[\sqrt{2005}\right] + 1$ . **61.**  $1 \cdot 2 \cdot 3$ . **62.**  $216 = 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6$ . **63.** 36. **64.** a) 450; b) 1200.

**65.**  $9 \cdot 10^4$ . **66.**  $10^4$ . **67.**  $10^4$ . **68.**  $3 \cdot 4 \cdot 5$ . **69.**  $12 \cdot 11 \cdot 10$ . **70.**  $2^4$ . **71.**  $3^5 - 3$ .

**72.**  $5^3$ . **73.**  $2^4$ ;  $2^4 - 4$ . **74.** Numărul cifrelor cu care sunt scrise primele 999 de numere, respectiv 9999 de numere nenule este:  $9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 = 2889$ , respectiv  $2889 + 4 \cdot 9000 = 38889$ . Rezultă că numărul căutat are 4 cifre. Numărul de cifre cu care se scriu numerele de 4 cifre până la cea de pe poziția 25180 inclusiv este  $25180 - 2889 = 22291 = 4 \cdot 5572 + 3$ . Numărul care conține cifra căutată este al 5573-lea din cele de 4 cifre, anume  $5573 + 999 = 6572$ . Cifra căutată este 7. **75.** Urmând un procedeu asemănător cu cel de la problema 74

se obțin 963 de pagini. **76.**  $\left[\frac{1000}{2}\right] + \left[\frac{1000}{2^2}\right] + \dots + \left[\frac{1000}{2^9}\right] = 994$ .

**77.**  $\left[\frac{1000}{5}\right] + \left[\frac{1000}{5^2}\right] + \left[\frac{1000}{5^3}\right] + \left[\frac{1000}{5^4}\right] = 249$ .

**78. a)**  $n = 18900 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 5^2$ . Se obțin  $2^3$  moduri. **b)**  $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$ .

Numărul de moduri este  $2^{k-1}$ . **79.**  $\frac{n(n-3)}{2}$ . **80.**  $n(n-3)$ . **81.**  $2n$ .

**82.**  $\frac{n(n-1)}{2}$ . **83.**  $4^n$ . **84. a)**  $n \in [50^2, 51^2 - 1] \cap \mathbb{N}$ . **b)**  $\left[\sqrt{n}\right]$ .

Capitolul II. FUNCȚII

1. Șiruri de numere reale

1.1. Noțiunea de șir de numere reale (pag. 63)

3. a)  $\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$ ; b)  $\frac{4n+1}{8n+1}$ ; c)  $n \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ; d)  $\frac{3n}{3n+1}$ ; e)  $\frac{2}{9}(10^n - 1)$ .

4. a)  $a_n = \frac{4n+3}{3}$ ; b) Toate în afară de  $\frac{509}{3}$ . 5. c) Se scrie  $a_n = \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$  și

rezultă  $b_n = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} \cdot \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} \cdots \frac{(n-2)(n+1)}{(n-1)n} \cdot \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} = \frac{n+2}{3n}$ ,  $n \geq 2$ .

7. a) Se scrie că  $x_{k+1} - x_k = 4k + 1$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  și se adună relațiile obținute. Rezultă că  $x_n = 2n^2 - n$ . 8. Se folosește metoda inducției matematice.

9. a)  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ; b) Inducție matematică.

10. Se observă că  $a_0 = 0^2$ ,  $a_1 = 1^2$ ,  $a_2 = 2^2$ ,  $a_3 = 3^2$ . Se arată prin inducție că  $a_n = n^2$ .

11. a)  $x_{k+1} - x_k = \sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . Se adună aceste relații și se obține  $x_n = \sqrt{n+1}$ . b) Da.

12. a)  $a_n = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$ ; b)  $a_n = 2^{n-2}$ ; c)  $x_n = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$ ; d)  $a_n = \frac{2}{n+1}$ ;

e)  $z_n = n^2$ . 13.  $z_n = 12n - 7$ .

15. a) Se scrie succesiv  $f_{k+2} = f_{k+1} + f_k$ ,  $k \geq 1$  și se adună aceste relații pentru  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Pentru punctele b)-g) se folosește inducția matematică.

16. a) Pentru  $n=1$  se obține că  $x_1 = x_1^2$  cu soluția  $x_1 = 1$ . Pentru  $n=2$  rezultă egalitatea  $1 + x_2 = \frac{(1+x_2)x_2}{2}$  cu soluția  $x_2 = 2$ . Se arată prin inducția că  $x_n = n$ .

b) Ecuația se scrie  $\frac{(1+n)(n+2)}{2} = 5n^2 - 7n - 14$  cu soluția  $n = 3$ .

17. Pentru  $n=1$  se obține că  $x_1^2 - 1 = \frac{3}{4}x_1^2$  cu soluția  $x_1 = 2$ . Pentru  $n=2$  se

obține egalitatea  $3(x_2^2 - 1) = \frac{2}{3}x_2^2$  cu soluția  $x_2 = 3$ . Se arată prin inducție matematică egalitatea  $x_n = n + 1$ .

1.2. Șiruri mărginite (pag. 66)

18. Se arată că: a)  $a_n \in (0, 1)$ ; b)  $a_n \in (0, 1)$ ; c)  $|a_n| < 1$ ; d)  $|a_n| < 1$ ;

e)  $a_{2k} = \frac{2k+1}{2k-1} \in (0, 3]$ ,  $a_{2k+1} = \frac{2k}{2k+2} \in [0, 1]$ ; f)  $a_n \in (0, 1]$ ; g)  $a_n \in (0, 2)$ ;

h)  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \in (0, 1)$ ; i)  $a_n \in (0, 1)$ ; j)  $a_n \in (0, 2)$ .

19. a)  $a_n = \frac{n}{n+1} \in (0, 1)$ ; b) Se arată că  $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ , pentru  $n \geq 2$ .

Rezultă că  $a_n \leq 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} - 2$  etc. c) Se folosește că  $2^n \geq n^2$ , pentru  $n \geq 1$ , deci  $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n^2}$  și se aplică b).

d)  $a_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$  etc. e) Se are în vedere că  $|a_n| < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{2}{n^2}$  etc.

20. a)  $a_n \in (0, 1)$ ; b)  $a_n \in (0, 1)$ ; c)  $a_n = \frac{n^2 + 3n + 2}{4n^2 + 6n - 1} \in (0, 1)$ .

21. a)  $0 < a_n < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = 1$ . b)  $b_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ .

22. a)  $a_n = (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n+1} - 1$ , șir nemărginit.

b) Se are în vedere că  $\sqrt{k} < \sqrt{k} + \sqrt{k+1}$  și  $\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Se obține prin adunare că  $a_n = \sqrt{n+1} - 1$ , deci  $a_n$  este nemărginit.

c)  $a_n > \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n$ , nemărginit. d) Dacă  $a \in (0, 2]$  avem că  $a_n \in (0, 1]$ . Dacă

$a \in (2, +\infty)$  se obține că  $a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^n$ , nemărginit. e)  $|a_n| \leq 1$ .

f)  $a_n = \frac{2n}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} \in (0, 2)$ ; g)  $a_n = \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{2(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \in (0, 1)$ ;

h)  $a_n = \frac{n^k}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ . Pentru  $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ,  $a_n$  este mărginit. Pentru  $k > \frac{1}{2}$ ,  $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} < 3\sqrt{n}$  și  $a_n > \frac{1}{3}n^{k-\frac{1}{2}}$ , deci  $a_n$  este nemărginit.

24. Nu. Exemplu:  $a_n = \begin{cases} n+1, & \text{pentru } n \text{ par} \\ \frac{1}{n}, & \text{pentru } n \text{ impar} \end{cases}$  este nemărginit și  $\left(\frac{1}{a_n}\right)$  este tot

nemărginit. 25. Nu. Exemplu:  $a_n = \frac{1}{n} \in (0, 1)$ , dar  $\frac{1}{a_n} = n$  este nemărginit.

26. Șirurile pot fi sau mărginite sau nemărginite. Exemple: a)  $a_n = n$ ,  $b_n = 2n \Rightarrow \Rightarrow a_n + b_n = 3n$  este nemărginit. Dacă  $a_n = n + \frac{1}{n}$ ,  $b_n = -n \Rightarrow a_n + b_n = \frac{1}{n}$  este

mărginit. **b)** Dacă  $a_n = \begin{cases} n+1, & n \text{ par} \\ \frac{1}{n+1}, & n \text{ impar} \end{cases}$ ,  $b_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & n \text{ par} \\ n+1, & n \text{ impar} \end{cases}$ , atunci  $a_n \cdot b_n = 1$  este mărginit. Dacă  $a_n = n$ ,  $b_n = n+1 \Rightarrow a_n \cdot b_n = n^2 + n$  este nemărginit. **c)** Se iau exemplele de la b). Avem  $\frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} (n+1)^2, & n \text{ par} \\ \frac{1}{(n+1)^2}, & n \text{ impar} \end{cases}$  care este nemărginit, respectiv  $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{n+1} \in (0, 1)$  care este mărginit.

**27.** Fie  $n \in \mathbb{N}^*$  fixat. Atunci numerele  $a_n$  și  $b_n$  verifică ecuația de gradul al doilea  $u_n^2 - x_n u_n + y_n = 0$ , cu soluțiile  $u_n = \frac{x_n \pm \sqrt{x_n^2 - 4y_n}}{2}$ . Dar șirurile  $(u_n)$  sunt mărginite, deci și  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  sunt mărginite.

**28.** **a)** falsă,  $a_n = n+1$ ,  $n_n = -n$ ; **b)** falsă,  $a_n = n+1$ ,  $b_n = -n$ ; **c)** falsă, vezi 26 b).

**29.** Fie  $a \leq a_n \leq b$ ,  $c \leq b_n \leq d$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Atunci  $\min(a, c) \leq c_n \leq \max(b, d)$ .

**30.** **a)**  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  sunt nemărginite; **b)** Avem  $a_{4k-1} \geq 2k$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , deci  $(a_n)$  este nemărginit.

### 1.3. Șiruri monotone (pag. 68)

**31.** **a)** descrescător; **b)** crescător; **c)** descrescător; **d)** nemonoton; **e)** nemonoton; **f)** nemonoton. **32.** Se aduc șirurile la o formă mai simplă. Avem: **a)**  $a_n = \frac{n}{2}$ ;

**b)**  $a_n = \frac{2n+4}{2n+1}$ ; **c)**  $a_n = \frac{(n+1)(8n+1)}{6n^2}$ ; **d)**  $a_n = \frac{2n}{n+1}$ ; **e)**  $a_n = \frac{(2^{n+1}-1)(2^n-1)}{2^n}$ .

**33.** **a)**  $a_n = \frac{1}{n+1}$ ; **b)**  $a_n = \frac{n+2}{2}$ ; **c)** Avem că  $a_n > 0$  și  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} < 1$ , deci

$(a_n)$  este descrescător. **d)**  $a_n > 0$  și  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{(n+2)^2} < 1$ .

**34.** **a)**  $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} - \frac{1}{n+1} > 0$ ; **b)**  $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4} + \frac{1}{4n+5} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} < 0$ , deoarece se arată că  $\frac{1}{4n+2} < \frac{1}{4n}$ ,  $\frac{1}{4n+3} < \frac{1}{4n}$ ,  $\frac{1}{4n+4} < \frac{1}{4n+2}$ ,  $\frac{1}{4n+5} < \frac{1}{4n+2}$  și se adună aceste egalități.

**35.** **a)**  $a_{n+1} - a_n = \alpha$ . Pentru  $\alpha > 0$ ,  $(a_n)$  este crescător, pentru  $\alpha < 0$ ,  $(a_n)$  este descrescător, iar pentru  $\alpha = 0$ ,  $(a_n)$  este constant. **b)**  $a_{n+1} - a_n = 1 - 2\alpha \cdot (-1)^n =$

$= \begin{cases} 1+2\alpha, & n \text{ impar} \\ 1-2\alpha, & n \text{ par} \end{cases}$ . Dacă  $1+2\alpha \geq 0$  și  $1-2\alpha \geq 0$ , deci  $\alpha \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  șirul este crescător. Pentru  $\alpha \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  șirul nu este monotonic. **c)**  $a_{n+1} - a_n = \frac{\alpha - \beta}{(n+1)(n+2)}$ .

Se consideră cazurile  $\alpha > \beta$ ,  $\alpha = \beta$ ,  $\alpha < \beta$ . **d)**  $a_{n+1} - a_n = \frac{2\alpha^2 - 1}{(n+\alpha^2)(n+1+\alpha^2)}$ . Se discută după semnul lui  $2\alpha^2 - 1$ . **e)** Pentru  $\alpha \in (0, 1)$  șir descrescător, pentru  $\alpha \in (1, +\infty)$  șir crescător, pentru  $\alpha = 1$  șir constant. **f)** pentru  $x \in (1, +\infty)$  șir descrescător, pentru  $x = 1$  șir constant.

**36.** **a)**  $a_n = 2n - 1$ ; **b)**  $a_n = 5^{n-2}$ ; **c)**  $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ; **d)**  $a_n = 2^{n-1} + 1$ ; **e)**  $a_n > 0$  și  $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{1+a_n} + \sqrt{1+a_{n-1}}}$ , deci toate diferențele  $a_{k+1} - a_k$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  au același semn. Deoarece  $a_2 - a_1 = \sqrt{2} - 1 > 0$  șirul  $(a_n)$  este crescător. **f)**  $a_n > 0$  și  $a_{n+1} = \sqrt{(a_n + 2)^2 + 1} > 2 + a_n > a_n$ ; **g)**  $a_n = \frac{n}{2}$ .

**37.** Fie  $a_n = n - 3$  șir crescător. Șirul  $a_n = (n-3)^2$  nu este monotonic. Pentru  $(a_n)$  crescător șirul  $(a_n^3)$  este crescător.

**39.** **a)** Nu se poate preciza; **b)** descrescător; **c)** descrescător; **d)** nu se poate preciza; **e)** descrescător. **40.** Dacă  $(x_n)$  este strict monotonic, diferențele  $x_{n+1} - x_n$  și  $x_n - x_{n-1}$  au același semn. Reciproc, dacă pentru  $n \in \mathbb{N}^*$  produsul este pozitiv atunci diferențele  $x_{n+1} - x_n$  și  $x_n - x_{n-1}$  au același semn și prin inducție rezultă că toate diferențele  $x_{k+1} - x_k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  au același semn.

### Testul nr. 1

**3.**  $a_n = \left[\frac{n+1}{2}\right]$ .

### Testul nr. 2

**2.** **b)** Se arată prin inducție că  $b_n < 4$ . Avem că  $b_n > 0$  și  $b_{n+1} - b_n = \sqrt{2b_n + 8} - b_n = \frac{-b_n^2 + 2b_n + 8}{2\sqrt{b_n + 8} + b_n} = \frac{(b_n + 2)(4 - b_n)}{\sqrt{2b_n + 8} + b_n} > 0$ ,  $n \geq 2$ . **3.**  $a_n = 2^{(-2)^{n-1}}$ .

2. Tipuri de șiruri

2.1. Progresii aritmetice (pag. 71)

3. d) Avem:  $a_1 + 2r = 13$  și  $a_1 + 33r = 137$ . Se obține  $r = 4$ ,  $a_1 = 5$ . e) Se obține

că  $4a_1 + 64r = 100$  sau  $a_1 + 16r = 25$  și  $S_{33} = \frac{a_1 + a_{33}}{2} \cdot 33 = (a_1 + 16r) \cdot 33 = 825$ .

f) Se obține că  $2a_1 + 31r = 256$  și  $S_{32} = \frac{a_1 + a_{32}}{2} \cdot 32 = 16(2a_1 + 31r) = 16^3$ .

7. a)  $r = \frac{1}{2}$ ,  $a_1 = 10$ ; b)  $r = \frac{3}{5}$ ; c) Din prima ecuație rezultă  $r = 3$ , apoi ecuația

$(a_1 + 6)(a_1 + 12) = 112$  cu soluția  $a_1 \in \{2, -20\}$ ; d) Se obține că:

$$\begin{cases} a_1 + 8r = 30 \\ (a_1 + 6r)(a_1 + 10r) = 836 \end{cases} \text{ cu soluțiile } a_1 = -2, r = 4 \text{ și } a_1 = 62, r = -4.$$

e)  $r = 2$ ,  $a_1 = -2$ ; f)  $r = 2$ ,  $a_1 = 1$  și  $r = \frac{78}{25}$ ,  $a_1 = -\frac{73}{15}$ .

8. a)  $a_1 = S_1 = 2$ ,  $a_2 = S_2 - a_1 = 18$ ,  $r = a_2 - a_1 = 16$ .

9. a) Avem relațiile  $a_1 + a_2 + a_3 = 10,5$  și  $a_1 a_2 a_3 = 35$ . Se obține că  $a_2 = a_1 + r = 3,5$  și  $(a_2 - r)a_2(a_2 + r) = 35$ , deci  $(3,5 - r)(3,5 + r) = 10$  etc. b) Fie  $a_3 = x$ . Rezultă că  $a_1 = x - 2r$ ,  $a_2 = x - r$ ,  $a_4 = x + r$ ,  $a_5 = x + 2r$  și se obțin egalitățile:  $5x = 5$ , deci  $x = 1$  și  $(1 - 2r)(1 - r)(1 + r)(1 + 2r) = 45$ . Se notează  $r^2 = y$  etc.

10. Este progresie aritmetică în cazurile a) b), c) și f) deoarece  $a_{n+1} - a_n$  este constant. 11. Este progresie aritmetică în cazurile a), b), d), e) și f) pentru  $\gamma = 0$ . 12. Dacă  $a = d = 0$  rezultă că  $S_n = bn^2 + cn$  și se obține succesiv  $a_1 = S_1 = b + c$ ,  $a_2 = S_2 - S_1 = 3b + c$  și prin inducție  $a_n = (2n + 1)b + c$ . Reciproc, dacă  $(a_n)$  este progresie aritmetică atunci  $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 - r + nr}{2} \cdot n$  și are forma  $S_n = \alpha n^2 + \beta n$ , deci  $a = d = 0$ .

13. a) Se exprimă  $a_1$  și  $r$  în funcție de  $n$ . Rezultă că  $a + 3r = 9$  și  $r = \frac{70}{3n - 19}$ , care înlocuite în prima egalitate  $S_{n+3} = 483$  conduc la ecuația  $31n^2 - 787n + 4122 = 0$ , cu soluția acceptabilă  $n = 18$ . b)  $a_1 = 2$ ,  $r = 4$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . c) 625.

16. a) Fie  $x_n = a_n + a_{n+1}$ . Rezultă că  $x_{n+1} - x_n = a_{n+2} - a_n = 2r$ , deci șirul  $(x_n)$  este progresie aritmetică cu rația  $2r$ . b) Dacă  $x_n = a_{4n-1}$  se obține că  $x_{n+1} - x_n = a_{4n+3} - a_{4n-1} = 4r$  etc. 17. Fie  $x_n = a_{f(n)}$ . Atunci  $x_{n+1} - x_n = a_{f(n+1)} - a_{f(n)} = a_1 + (f(n+1) - 1)r - a_1 - (f(n) - 1)r = ar$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

2.2. Progresii geometrice (pag. 73)

21. a)  $b_1 = 1$ ,  $q = \sqrt{3}$ ; b)  $b_1 = -108$ ,  $q = -\frac{1}{3}$ ; c)  $b_1 = 6$ ,  $q = 2$ ; d)  $b_1 = 6$ ; e)  $q = \pm 3$ ,

$b_1 = 6$ ; 24. Se calculează  $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ . Se obține: a)  $q_1 = q^2$ ; b)  $q_1 = q$ ; c)  $q_1 = q^2$ .

25. a), b). 28. a)  $a_1 = -321$ ,  $q = \frac{5}{2}$  sau  $a_1 = 1250$ ,  $q = \frac{2}{5}$ ; b)  $q = -2$ ,  $a_1 = -1$ ;

c)  $q = 2$ ,  $a_1 = 3$ ; d)  $q = \frac{1}{3}$ ,  $a_1 = 36$ ; e) Se are în vedere că  $1 + q^2 + q^4 = (1 + q + q^2) \cdot$

$(1 - q + q^2)$ . Rezultă  $q = 3$ ,  $a_1 = 1$  au  $q = \frac{1}{3}$ ,  $a_1 = 9$ . f)  $q = \frac{1}{2}$ ,  $a_1 = \{\pm 4\}$ . 29. Fie

$a_1 = x$ . Rezultă ecuația  $(x + 8) + (32x + 16) = 2(8x + 34)$  cu soluția  $a_1 = 2$ .

30. Rezultă relațiile  $\begin{cases} 1 + r = q^2 \\ 3 + 7r = 3q^3 \end{cases}$ , între rațiile celor două progresii. Se obține

ecuația  $3q^3 - 7q^2 + 7 = 0$  cu soluțiile  $q \in \left\{1, 2, -\frac{2}{3}\right\}$  etc.

31. Se obține  $a_1 = b_1 \in \mathbb{R}^*$  și rațiile nenule  $q_1 = 2$ ,  $q_2 = 3$ .

32. a) Se înlocuiește  $a_n = b_n - 1$  în relația de recurență și rezultă că  $b_{n+1} = 2b_n$ . Rezultă că  $b_n = 2^n$  și  $a_n = 2^n - 1$ . b)  $c_n = a_n - a_{n-1} = 2^{n-1}$ .

34. Se arată că  $b_{n+1} = -\frac{3}{5}b_n$ , deci  $b_n = \left(-\frac{3}{5}\right)^n$ . Termenul general  $a_n$  se determină din egalitatea  $b_n = \frac{a_n - 2}{a_n + 2}$ . 35. a) Relația de recurență se scrie

$3(a_{n+2} - a_{n+1}) = a_{n+1} - a_n$ , deci  $b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n$ . Se obține  $b_n = \frac{5}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ . b) Se scrie că

$a_{k+1} - a_k = b_k$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  și se adună relațiile obținute. 36. Se substituie  $u_n = v_n - 2n + 1$  în relația de recurență a lui  $(u_n)$  și rezultă

$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$  etc. 37. Se substituie  $a_n = \frac{\sqrt{2}}{2}(b_n + n)$  în relația de recurență a lui

$(a_n)$  și se obține  $b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$  etc.

38. g) Avem succesiv:  $S_n = (2 + 2^2 + \dots + 2^n) + (2^2 + 2^3 + \dots + 2^n) + (2^3 + 2^4 + \dots + 2^n) + \dots + 2^n = 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} + 2^2 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} + 2^3 \cdot \frac{2^{n-2} - 1}{2 - 1} + \dots + 2^n \cdot \frac{2 - 1}{2 - 1} = (2^{n+1} - 2) + (2^{n+1} - 2^2) + \dots + (2^{n+1} - 2^n) = n \cdot 2^{n+1} - (2 + 2^2 + \dots + 2^n) = n \cdot 2^{n+1} - 2^{n+1} + 2$ .

39. Punctele a), b) sunt cazuri particulare ale punctului c) Suma dată se scrie succesiv:  $S_n = (x + x^2 + \dots + x^n) + (x^2 + x^3 + \dots + x^n) + (x^3 + x^4 + \dots + x^n) + \dots + x^n =$

$$= x \cdot \frac{x^n - 1}{x - 1} + x^2 \cdot \frac{x^{n-1} - 1}{x - 1} + x^3 \cdot \frac{x^{n-2} - 1}{x - 1} + \dots + x^n \cdot \frac{x - 1}{x - 1} = \frac{1}{x - 1} (x^{n+1} - x + \dots + x^{n+1} - x^n) =$$

$$= \frac{1}{x - 1} (nx^{n+1} - x - x^2 - \dots - x^n) = \frac{1}{x - 1} \left( nx^{n+1} - x \cdot \frac{x^n - 1}{x - 1} \right) = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x - 1)^2}.$$

**d)** Se ridică la pătrat fiecare paranteză și se grupează termenii pentru a obține sume de progresii geometrice. **e)** Se dă factor comun  $x^{n-1}$  și se aplică c).

**41. a)** Se scrie că  $\underbrace{111\dots1}_{k \text{ cifre}} = 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{k-1} = \frac{10^k - 1}{9}$  și se obține suma unei

progresii geometrice. **42.** Avem că  $\frac{u_{k-1} \cdot u_k}{u_{k+1} + u_k} = \frac{u_1}{1+q} \cdot q^k$  și se obține suma unei

progresii geometrice. **43.** Se observă că  $\frac{\sqrt{v_k}}{\sqrt{v_k} - \sqrt{v_{k-1}}} = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q} - 1}$ .

**2.3. Aplicații (pag. 77)**

**44. a)**  $x = 3$ ; **b)**  $x \in \{2, 3\}$ ; **c)**  $x \in \{2, 5\}$ ; **d)**  $x \in \{0, 3\}$ ; **e)**  $x \in \left\{ \frac{3}{2}, 5 \right\}$ .

**45. a)**  $x \in \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\}$ ; **b)**  $x \in \left\{ \frac{1}{3}, 3 \right\}$ ; **c)**  $x = \frac{9}{17}$ .

**46. a)**  $x \in \left\{ -\frac{1}{2}, 2 \right\}$ ; **b)**  $x \in \left\{ 2, \frac{50}{79} \right\}$ ; **c)**  $x \in \left\{ -\frac{1}{6}, 2 \right\}$ .

**47. a)**  $x = -1$ ; **b)**  $x \in \{2, 5\}$ ; **c)**  $x = 2$ ; **d)**  $x \in \left[ \frac{4}{3}, 3 \right)$ . **e)** Se obține că  $8x - 2 = \left[ \frac{5}{x} \right] + \left[ \frac{3x}{x+1} \right] \leq 5 + 3 = 8$ , deci  $8x - 2 \leq 8$  sau  $x \in \{0, 1\}$ . Verifică doar  $x = 1$ .

**48. a)**  $a_1 = 10, r = 2.5, n = 19$ ; **b)**  $r = \frac{3}{4}, a = \frac{7}{2}, n = 56$ .

**49. a)** Avem  $a_1 = 2, a_n = x + 4$  și  $S_n = 6477, r = 5$ . Relațiile anterioare conduc la egalitățile:  $x = 5n - 7$  și  $n(x + 6) = 2 \cdot 6477$ . Se obține  $n = 51, x = 248$ .

**b)**  $n = 9, x = 25$ ; **c)**  $x = 204, n = 30$ ; **d)**  $n = 20, x = 23$ ; **e)**  $n = 41, x = 43$ ; **f)**  $n = 16, x = 6$ ; **g)**  $n = 20, x = \frac{47}{2}$ ; **h)**  $n = 24, x = 50$ . **50. a)**  $x = 5$ ; **b)**  $y = 2$ . **51.**  $x = 1, y = 2$ . **52.** Primele 3 numere sunt în progresie aritmetică dacă  $4x = 5 + 2\{x\}$ .

Se obține  $x = \frac{3}{2}$  și  $y = 1$ . **b)**  $x = \frac{5}{3}, y = -1$ ; **c)** Se obține de  $[2x - 2] = 1$ , de unde  $x \in \left[ \frac{3}{2}, 2 \right)$ . **55.** Unghiurile au măsurile de  $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ .  $S = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2$ .

**56.** 12300. **57.** Se are în vedere că lungimea medianei din vârful A verifică egalitatea  $4m_A^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$  etc. **58.**  $n = 8$ . **59. a)**  $n = 3$ ; **b)**  $n = 4$ ; **c)**  $n = 5$ ;

**d)**  $n = 6$ . **60.** 180 m. **61.** 60, 120, 180, 240, respectiv 300 de milioane de lei.

**62.** Se substituie  $b = \frac{a+c}{2}$  în numerele date și se arată că al doilea este medie aritmetică a primelor două. **67.** Considerăm numerele date scrise sub forma  $a = x - 3y, b = x - y, c = x + y, d = x + 3y$  progresie aritmetică cu rația  $r = 2y$ .

Atunci:  $N = (x - 3y)(x + 3y)(x - y)(x + y) + 16y^4 = x^4 - 10x^2y^2 + 25y^4 = (x^2 - 5y^2)^2$ .

**68. a)**  $-nr$ . **b)** Se folosește egalitatea  $a_k a_{k+1} = \frac{1}{3r} (a_k a_{k+1} a_{k+2} - a_{k-1} a_k a_{k+1})$ ,  $k \geq 2$ .

Se adună aceste relații. **d)**  $\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{r} \left( \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right)$ ,  $k \geq 1$ . Prin adunarea acestor

egalități se obține  $S = \frac{n}{a_1 a_{n+1}}$ . **e)**  $\frac{1}{a_k a_{k+1} a_{k+2}} = \frac{1}{2r} \left( \frac{1}{a_k a_{k+1}} - \frac{1}{a_{k+1} a_{k+2}} \right)$ ,  $k \geq 1$  etc.

**f)**  $S = \sum_{k=1}^n k^2 a_k = \sum_{k=1}^n a_1 k^2 + r \sum_{k=1}^n (k^3 - k^2)$  etc. **g)**  $\frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = \frac{1}{r} (\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k})$ ,  $k \geq 1$

și se adună aceste egalități. **69.** Se poate demonstra prin inducție matematică. **70.** Vezi 108 g) **71. b)**  $n = 6$ ; **c)**  $n = 12$ ; **d)**  $n = 8$ .

**73. a)**  $x \in \{3, 59\}$ ; **b)**  $x \in \left\{ -4, -\frac{2}{3} \right\}$ ; **c)**  $x \in \{1, 2\}$ ; **d)**  $x = 2$ .

**74. a)**  $x = -1$ ; **b)**  $x \in \left\{ -\frac{3}{10}, \frac{3}{2} \right\}$ ; **c)**  $x \in \left\{ \frac{1}{11}, 1 \right\}$ ; **d)**  $x = 1$ ; **e)**  $x \in \{-1, 2\}$ .

**75. a)**  $x \in \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{11}{6} \right\}$ ; **b)**  $x \in \left\{ \frac{2}{3}, -\frac{2}{11} \right\}$ ; **c)**  $x \in \left\{ 6, -\frac{1}{2} \right\}$ ; **d)**  $x = 6$ ; **e)**  $x = -2$ ;

**f)**  $x = 31$ ; **g)**  $x \in \{-7, 1\}$ ; **h)**  $x \in \left[ \frac{4}{3}, 3 \right)$ ; **i)** Se obține  $8x - 2 = \left[ \frac{5}{x} \right] + \left[ \frac{3x}{x+1} \right] \leq 5 + 3 = 8$ , deci  $x \in \{0, 1\}$ . Verifică  $x = 1$ .

**76. a)**  $x \in [-1, 0]$ . **b)** Se obține că  $\left[ \frac{2x+1}{5} \right] = \frac{x-2}{3}$  cu soluția  $x \in \{-10, -7, -4, -1\}$ .

**c)** Se obține ecuația  $\left[ \frac{7x-2}{5} \right] = \frac{2x+1}{3}$  cu soluția  $x = 1$ . **77.**  $x = 2, y = -2$ .

**78. a)**  $n = 10$ ; **b)**  $n = 4$ . **79.** 27 și 81. **80.**  $\frac{2}{15}, \frac{2}{45}, \frac{2}{27}$  sau  $-\frac{2}{15}, \frac{2}{45}, -\frac{2}{27}$ .

**81. a)** Fie  $a_m = \sqrt{2}, a_n = \sqrt{3}, a_p = \sqrt{5}$ , deci  $a_1 q^{m-1} = \sqrt{2}, a_1 q^{n-1} = \sqrt{3}$  și  $a_1 q^{p-1} = \sqrt{4}$ . Se obține prin împărțire  $q^{m-n} = \sqrt{\frac{2}{3}}$  și  $q^{n-p} = \sqrt{\frac{3}{5}}$  de unde:

$\left( \frac{2}{3} \right)^{n-p} = \left( \frac{3}{5} \right)^{m-n}$  sau  $2^{n-p} \cdot 5^{m-n} = 3^{m-p}$  egalitate imposibilă în  $\mathbf{Z}$ .

**82.** 2, 6, 18, 54. **83.** a, -a, a, -a sau a, 2a, 4a, 8a sau  $a, \frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \frac{a}{8}$ , unde  $a \in \mathbb{R}^*$ . **84.** 2, 4, 8, 16, 32, 64. **85.** 3, 12, 48 sau 48, 12, 3.

**86.**  $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 4\sqrt{2}$  sau  $9\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 4\sqrt{2}$ . **87.** 1, 3, 9, 27, 81, 243 sau -2, 6, -18, 54, -162, 486. **88.**  $a_1 = 5, r = 0$  sau  $a_1 = 2, r = 3$ . **89.** Fie r și q rațiile celor două progresii. Se obțin ecuațiile  $1+r=q^2$  și  $7r+3=3q^3$ . Se elimină r și se obține  $3q^3 - 7q^2 + 4 = 0$  cu soluțiile  $q \in \left\{1, 2, -\frac{2}{3}\right\}$  etc.

**90.** 2, 4, 8, 16, 32, ... **91.** 1, 5, 9, 13. **92.** 5, 9, 13. **93.** 3, 7, 11 sau 21, 7, -7.

**94.**  $1, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \sqrt{2}$  sau  $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \sqrt{2}$ , respectiv  $1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}$  sau  $1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}$ .

**95.** 1, 3, 5, 7. **97. a)** Numărul se scrie  $A = 9 + 4 \cdot 10^{n+1} + (99 \dots 9) \cdot 10^{n+2}$ . Dar  $\underbrace{99 \dots 9}_n = 9(1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{n-1}) = 10^n - 1$  și rezultă că  $A = (10^{n+1} - 3)^2$ .

**b)**  $A = \left(\underbrace{99 \dots 91}_{n+1}\right)^2$ . **98. a)**  $n = 15$ ; **b)**  $n = 6$ ; **c)**  $n = 8$ ; **d)**  $n = 6$ .

**Teste de verificare (pag. 84)**

**Testul nr. 2**

**1.** 1, 2, 3, 4, ... sau 6, 2, -2, -6, ...

**2.**  $b_n = kr(a_{n+k} + a_n)$  și  $b_{n+1} - b_n = kr(a_{n+k+1} + a_{n+1} - a_{n+k} - a_n) = 2kr^2$ , deci  $(b_n)$

este progresie aritmetică. **3.**  $b_n = a_n$ . **4.**  $a = \left(\underbrace{33 \dots 34}_{n-1}\right)^2$ .

**5.** Se scriu numerele sub forma  $a - 3b, a - b, a + b, a + 3b$ . Se obține  $a = \frac{5}{2}$  și  $144b^4 - 616b^2 + 145 = 0$ , cu soluțiile  $b^2 = \frac{1}{4}$  și  $b^2 = \frac{145}{36}$  etc.

**Testul nr. 3**

**2.**  $x = \frac{2}{3}$ ; **3.**  $a_1 = 2, q = 2$  sau  $a_1 = 16, q = \frac{1}{2}$ . **4.**  $\alpha = 1, b_n = 3^n, a_n = 3^n - 1$ .

**Testul nr. 4**

**2.** Putem presupune că  $a_1 = p^2$ . Atunci  $a_{2p+r+1} = a_1 + (2p+r)r = (p+r)^2$  sau mai general  $a_{2pn+n^2+r+1} = (p+nr)^2, n \geq 1$ . **3.**  $x = 6$ , respectiv  $x = 10$  (progresie cu rația nenulă).

**3. Funcții. Lecturi grafice**

**3.1. Reper cartezian. Produs cartezian**

Directe în plan de forma  $x = m$  sau  $y = m, m \in \mathbb{D}$  (pag. 86)

**3. a)**  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3\}$ ; **b)**  $A = \{-1, 0, 3\}, B = \{-1, 3, 5, 6\}$ . **4.**  $A = B$ .

**14. a)**  $B = \{(-2, -1), (0, 0), (2, 1), (4, 2), (6, 3)\}$ ;

**b)**  $B = \{(-1, -3), (0, -2), (1, -1), (2, 0), (3, 1), (4, 2), (5, 3), (6, 4)\}$ .

**15.** Se obține că  $\{1, 2\} \subset A \subset \{1, 2, 3\}, \{1, 2\} \subset B \subset \{1, 2, 3, 4\}, B \subset A, A \subset B$  și există situațiile:  $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2\}$  sau  $A = B = \{1, 2, 3\}$ .

**16.**  $A = \{-8, -2, 0, 6\}, B = [-4, -1] \cup [1, 2]$ .

**17.**  $M_1 = \{(a, a) \mid a \in A\}, M_2 = \{(a, b), (b, a)\}, b \neq a, a, b \in A$ .

**18.** Este necesar ca:  $C \subset A \subset D, C \subset B \subset D$ , deci se poate lua  $A = B = C = \{1, 2\}$  sau  $A = C, B = D$  sau  $A = D, B = C$  sau  $A = B = D$ .

**19.** Din primele două relații rezultă că  $A = B$  etc.

**20. a)** A poate fi orice submulțime a mulțimii  $\{1, 2, 3\}$ ; **b)**  $A = \{1, 2\}$  sau  $A = \emptyset$  sau  $A = \{1, 2, 3\}$ . **c)**  $A = \emptyset$  sau  $A = \{1, 3, 5\}$ . **23.**  $A = \{4\}, B = \{3\}$ .

**3.2. Noțiunea de funcție (pag. 89)**

**26. a)** Niciuna. **b)** Sunt 9 funcții. **28.** a), c), f), g), h). **29.** da, nu.

**30.**  $f(n) = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 8, n = 4k + 1 \\ 4, n = 4k + 2 \\ 2, n = 4k + 3 \\ 6, n = 4k + 4 \end{cases}$ . **31.**  $f(n) = \begin{cases} 0, n = 5k \\ 1, n = 5k + 1 \\ 2, n = 5k + 2 \\ 3, n = 5k + 3 \\ 4, n = 5k + 4 \end{cases}$ . **32. a)**  $m = 4$ ; **b)** nu.

**37. c)**  $n = 10$ . **38. a)**  $f(1) = -6 \Rightarrow m = -1$ ; **b)**  $m = 4$ . **39. a)**  $a = 3, b = -2, c = 5$ ; **b)**  $a = 1, b = -7, c = 3$ . **41.** Nu. De exemplu  $8 = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 = 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 4$  și ar

trebui să avem  $f(8) = -8$  și  $f(8) = 16$  și nu se poate. **42.**  $A = \left\{1, \frac{7}{5}, -2 \pm \sqrt{11}\right\}$ .

**45.**  $f(x) = \frac{1}{9}(x^2 + 5x - 23)$ . **46.** Se ia  $a = 1, a = -1, a = 2 - \sqrt{5}$ , respectiv  $a = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ . **47.** Pentru  $a < 2$  se obține ecuația  $3a^2 - a - 4 = 0$  cu soluția

$a \in \left\{-1, \frac{4}{3}\right\}$ . Pentru  $a \geq 2$  se obține ecuația  $3a^2 - a - 10 = 0$  cu soluția  $a = 2$ .

Așadar  $a \in \left\{-1, \frac{4}{3}, 2\right\}$ . **50.**  $f = g$ . **53.** Se poate lua  $A \subset \{0, 1, 5\}$ . Mulțimea  $\{0, 1, 5\}$  este mulțimea soluțiilor ecuației  $(x+1)(x-3) = x^2(x-5) - 3(1-x)$ .

**54.** Din egalitățile  $f(x_1) = g(x_1)$ ,  $f(x_2) = g(x_2)$  rezultă că  $a(x_1 - x_2) = c(x_1 - x_2)$  și  $a = c$ , apoi  $b = d$ . **56.** Fie  $|x| = ax + b$ . Pentru  $x = 0$  și  $x = 1$  se obține că  $b = 0$ ,  $a = 1$ , deci  $|x| = x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , ceea ce nu se poate.

**57.**  $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{dacă } x = 4n + 1 \\ 8, & \text{dacă } x = 4n + 3 \end{cases} = g(x)$ . **58.**  $f(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n = 4k + 1 \\ 4, & n = 4k + 2 \\ 8, & n = 4k + 3 \end{cases} = g(n)$ . **60.** Din

$f(x_0) = g(x_0)$  se obține că  $x_0^2 + ax_0 + b = x_0^2 + cx_0 + d$  sau  $(a - c)x_0 = d - b$ .

Dacă am avea  $a - c \neq 0$  atunci  $x_0 = \frac{d - b}{a - c} \in \mathbb{Q}$ , deci  $a = c$  și apoi  $b = d$ .

### 3.3. Imaginea și preimaginea unei mulțimi printr-o funcție

#### Graficul funcției. Restricția unei funcții (pag. 95)

**62.** **a)**  $f(A) = [-1, 11]$ ,  $f(B) = [5, +\infty)$ ,  $f(C) = (-\infty, 1)$ ,  $f(D) = [-1, 3] \cup [5, 13]$ .

$f(E) = \left\{2, \frac{4}{3}\right\}$ . **b)**  $f^{-1}(M) = [-2, 0]$ ,  $f^{-1}(N) = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ,  $f^{-1}(P) = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$ ,  $f^{-1}(S) = \{3\}$ ,

$f^{-1}(U) = \{-3, -6\}$ . **64.** **a)**  $f(x) = 3x - 5$  sau  $f(x) = -3x + 1$ . **b)**  $f(x) = 5x - 3$  sau  $f(x) = -5x + 8$ ; **c)**  $a \in (-\infty, 0)$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ; **d)** Este necesară condiția  $a \leq b$ . Se obține  $f(x) = -2x$  sau  $f(x) = -x + 3$ .

**65.** **a)**  $f(x) = 2x + 5$  sau  $f(x) = -2x - 3$ ; **b)**  $f(x) = \frac{3}{5}x + \frac{3}{10}$  sau  $f(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$ ;

**c)**  $f(x) = 6x + 1$  sau  $f(x) = -6x + 1$ . **68.** **a)**  $\text{Im } f = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ .

**69.** **a)**  $m \in \left\{-1, \frac{3}{7}\right\}$ ; **b)**  $m \in \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$ . **70.** **a)**  $m = \frac{1}{2}$ ; **b)**  $m = 5$ . **71.**  $m \in \{-4, 2\}$ .

**73.**  $m = \frac{5}{3}$ . **74.**  $m = \frac{1}{2}$ . **78.**  $a = b = 2$  sau  $a = -2$ ,  $b = 2$ .

### 3.4. Funcții numerice

**85.** **a)**  $\left(0, \frac{3}{5}\right)$  și  $(x, 0)$ , unde  $x \in \{27, -22, -17, -12\}$ . **b)**  $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ , respectiv

$(x, 0)$ , unde  $x \in \left\{-\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, 1\right\}$ ; **c)**  $\left(0, -\frac{6}{7}\right)$ , respectiv  $(x, 0)$ , unde  $x \in \{29, 36,$

$43, 50, 57, 64\}$ . **87.**  $m = \frac{5}{3}$ ,  $n = \pm \frac{1}{3}$ . **88.**  $x = 2$ ,  $b = 12$  sau  $a = \frac{2}{23}$ ,  $b = \frac{2388}{529}$ .

**89.** **a)**  $m \in \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\right\}$ ; **b)**  $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{8}\right)$ .

### 4. Proprietăți generale ale funcțiilor

#### 4.1. Funcții mărginite (pag. 100)

**1.** **a)**  $0 \leq f(x) \leq 2^{2004}$ ; **b)**  $\text{Im } f$  este mulțime finită. **c)**  $\text{Im } f = \{1, 4\}$ ;

**d)**  $\text{Im } f = \{1, 7, 9, 3\}$ ; **e)**  $f(n) \in [0, 1]$ ; **f)**  $\text{Im } f = \{0, 1\}$ ; **g)**  $f(x) \in [0, 10]$ ;

**h)**  $f(n) = \min(n, 20) \leq 20$ .

**2.** **a)**  $0 \leq f(n) \leq 2004$ ; **b)**  $f(n) = 2$ ; **c)**  $f(x) \in [-1, 2]$ ; **d)**  $f(x) = \{x\}$ ; **e)**  $|f(x)| \leq 1$ ;

**f)**  $\text{Im } f = \{1, 2\}$ ; **g)**  $|f(x)| \leq 4$ . **3.** **a)**  $\text{Im } f = [-13, 5]$ ; **b)**  $\text{Im } f = [0, 2]$ ; **c)**  $|f(x)| \leq 2$ ;

**d)**  $\text{Im } f = [2, 3]$ ; **e)**  $\text{Im } f = [-2, 0]$ ; **f)**  $|f(x)| \leq 2$ . **4.** **a)**  $f(n) \geq n - 1$ ; **b)**  $f(n) \geq n$ ,

$\forall n \geq 2004$ ; **c)**  $f(2k) \geq 2k$ ; **d)**  $f(n) \geq n$ ; **e)** Dacă am avea  $|f(x)| < M$ , atunci

$|x| > \frac{1}{M}$ ,  $\forall x > 0$ . Luând  $x = \frac{1}{M+1}$  se obține o contradicție. **e)**  $f(x) \geq x$ ,  $x \geq 1$ .

**6.**  $D_f = [1, 2)$ . Dacă luăm  $x_n = 2 - \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}'$ , se obține că  $f(x_n) = -a \cdot n + 2 - \frac{1}{n}$

și este necesară condiția  $a = 0$ . **7.** **a)**  $f(n) \geq 3n - 1$ ; **b)**  $f(n) \geq n$ ; **c)** Pentru

$x_n = 1 + \frac{1}{n}$  se obține că  $f(x_n) = n$ , deci  $f$  este nemărginită. **d)**  $D_f = \left\{n + \frac{1}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ ,

deci  $f\left(n + \frac{1}{2}\right) = n + \frac{1}{2} > n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}'$  și  $f$  este nemărginită; **e)**  $f$  este nemărginită;

**f)**  $f(x) \geq x - 1$ ,  $\forall x \geq 2$ . **8.**  $f(n) = \sqrt{n^2 + 1} - 1 > n - 1$  este nemărginită.

**9.** Avem:  $n^2 \leq nx < n^2 + 1$ , deci  $n \leq x < n + \frac{1}{n}$  și  $[x] = n$ , iar  $f(n) = n$ .

#### 4.2. Funcții pare. Funcții impare (pag. 101)

**11.** **a)** impară; **b)** pară; **c)** nici pară, nici impară; **d)** impară. **12.** **a)**  $f$  este pară

pentru oricare  $a \in \mathbb{R}$ ; **b)**  $a = 0$ , pară; **c)**  $a = 0$ , impară; **d)**  $a = 0$ , pară; **e)**  $a = 0$ , pară; **f)**  $f(n) = -a$ . Dacă  $a \in \mathbb{Z}'$ ,  $f$  este pară; dacă  $a = 0$ ,  $f$  este și pară și impară.

**13.**  $g$  este pară,  $h$  este impară. **14.** **a)** pară; **b)** impară; **c)** pară; **d)** impară;

**e)** niciun fel; **f)** pară; **g)** niciun fel; **h)** impară. **15.** Funcția  $f = g + h$ , unde  $g, h$

sunt funcțiile de la problema 13. **16.** Se are în vedere problema 13. **17.** Se

arată că  $f(x) = f(2 - x)$ ,  $x \in D$ . **18.** **a)**  $m = -2$ ; **b)**  $m = 1$ ; **c)**  $m = \frac{4}{3}$ ; **d)**  $m = -2$ .

**19.** **a)**  $f$  este pară,  $x = 0$ ; **b)**  $f$  este pară,  $x = 0$ .

**20.** Se arată că  $f(x) + f(4 - x) = 14$ . **21.** Dacă  $A(a, b)$  este centru de simetrie,

atunci  $f(x) + f(2a - x) = 2b$ ,  $x \in D$ . Se găsește că  $A(1, 4)$ . **22.** Se arată că

$f(x) + f(1 - x) = 0$ . **23.** **a)**  $f$  este impară,  $A(0, 0)$ ; **b)**  $A(1, 2)$ ; **c)**  $A(1, 4)$ .

**24.** a) Orice dreaptă  $x = m$ , este axă de simetrie. b) Avem că  $f(x) = f(2m - x)$ , deci  $x = m$  este axă de simetrie,  $m \in \mathbb{N}$ ; c)  $x = m$ ,  $m \in \mathbb{Q}$ ; d)  $x = \frac{n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , deoarece  $f(x) = \{x\}$ . **25.**  $A = \mathbb{Z}$ . **26.** Dacă  $a$  este par se arată că  $f(n) = f(a - n)$ . Dacă  $a$  este impar se arată că  $f(n) + f(a - n) = 0$ . Deci  $A\left(\frac{a}{2}, 0\right)$  este centru de simetrie. **27.** a)  $A(m, 7)$ ,  $m \in \mathbb{Q}$ ; b)  $A(m, 3m + 11)$ ,  $m \in \mathbb{Q}$ ; c)  $A(m, 3 - 7m)$ ; d)  $A\left(\frac{n}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; h)  $A\left(n, \frac{1}{2}\right)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  sau  $A\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$ . **28.**  $x = \frac{2n-1}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  sunt axe de simetrie, iar  $A(n, 0)$  sunt centre de simetrie.

**29.** a)  $C(m, 2m - 3)$ ,  $m \in \mathbb{Q}$  sunt centre de simetrie. b) Fie  $A = \{x_0\}$  și  $C(a, b)$  centre de simetrie, iar  $y_0 = 2a - x_0$ . Ar trebuie ca  $f(y_0) + f(2a - y_0) = 2b$ . Dar  $2a - y_0 \notin D_f$ . Cum  $C(a, b)$  este centru de simetrie este necesară condiția  $2a - x_0 \in D_f$ , deci  $x_0 = a$ .

Așadar singurul centru de simetrie este  $C(x_0, 2x_0 - 3)$ . Dacă  $A = \{x_1, x_2\}$  centrul de simetrie este  $C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, x_1 + x_2 - 3\right)$ , adică mijlocul segmentului cu capetele de coordonate  $(x_1, 2x_1 - 3)$ ,  $(x_2, 2x_2 - 3)$ . c) Dacă  $C(a, b)$  este centrul de simetrie, avem egalitatea  $f(x) + f(2a - x) = 2b$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus A$ . Este necesar ca, dacă  $x \in A$ , atunci și  $2a - x \in A$ , altfel egalitatea anterioară nu ar avea loc pentru oricare  $x \in D_f$ . Putem avea, de exemplu,  $2a - a_1 = a_2$ , deci  $2a - a_2 = a_1$  și este necesar ca  $2a - a_3 = a_3$ . Se obține că  $a_3 = a$  și  $a_1 + a_3 = 2a = 2a_3$  etc. d) Având în vedere b), dacă  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  și  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sunt în progresie aritmetică,  $f$  are centru de simetrie, în caz contrar nu. e) Se poate lua  $A = \mathbb{Z}$  sau  $A = \mathbb{Q}$  sau  $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . (argumentați). **30.** a) Pentru  $x = y = 0$  se obține  $f(0) = 0$ . Pentru  $y = -x$  se obține că  $f(-x) = -f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , deci  $f$  este impară. b) Se obține că  $f(0) \in \{0, 1, -1\}$ . Dacă  $f(0) = 0$  se ia  $y = -x$  și rezultă că  $f$  este impară. Dacă  $f(1) = 0$ , atunci  $f(x+1) = f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Pentru  $y = 1 - x$  se obține că  $f(x) + f(1 - x) = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Așadar  $f(-x) + f(1 + x) = 0$  sau  $f(-x) + f(x) = 0$  și  $f$  este impară. Analog pentru  $f(-1) = 0$ .

**4.3. Funcții periodice (pag. 105)**

**32.** a) 1; b) 1; c) 4; d) 4; e) 2; f) 4. **33.** a) 2; b) 3; c) 9; d) 11. **34.**  $f(n) = 25$ , deci  $T = 1$ . **35.** a)  $A = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ,  $T = 20$ ; b)  $A = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ,  $T = 5$ ; c)  $A = \mathbb{N}$ ,  $T = 20$ ; d)  $A = \mathbb{N}$ ,  $T = 10$ ; e)  $A = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ,  $T = 10$ ; f)  $A = \mathbb{N}$ ,  $T = 4$ . **36.** Se are în vedere

că  $\{x+n\} = \{x\}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . a)  $T = 2$ ; b)  $T = 2$ ; c)  $T = 6$ ; d)  $T = 2$ ; e)  $T = 2$ ; f)  $T = 6$ ; g)  $T = 3$ . **37.** a)  $T = a_1$ ; b)  $T = \text{c.m.m.m.c.}(a_1, a_2)$ ; c)  $T = \text{c.m.m.m.c.}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ ; d)  $T = \text{c.m.m.m.d.}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ . **39.**  $T = P$ . **40.**  $T = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p$ . **41.** Mulțimea perioadelor lui  $f$  este  $\mathbb{Q}$ . **42.** Avem relațiile  $f(x) = f(2a - x)$ ,  $f(x) = f(2b - x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , deci  $f(2x - a) = f(2b - x)$  și rezultă că  $f(x) = f(x + 2b - 2a)$ , deci o perioadă este  $T = 2b - 2a \neq 0$ .

**43.** Fie  $f(x) = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] - [nx]$ . Se arată că  $f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x)$ , deci  $f$  este periodică cu  $T = \frac{1}{n}$ . Pentru  $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right)$  se obține  $f(x) = 0$ . Așadar,  $f$  fiind periodică, rezultă că  $f = 0$ . **44.** Se ia  $f(x) = \left\{\frac{x}{T}\right\}$ .

**45.** Se arată că  $g\left(x + \frac{T}{a}\right) = g(x)$ , unde  $T$  este perioada lui  $f$ .

**46.** Fie  $T_1 = \frac{m}{n} T_2$ . Notăm  $T = nT_1 = mT_2$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Se arată că  $T$  este perioadă a funcțiilor  $h$  și  $i$ . **47.** Se obține  $f(x) = \frac{2g(x) - g(1-x)}{3}$ . Dacă  $T$  este perioadă pentru  $g$  se arată că  $f(x+T) = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**48.** a) Fie  $T$  perioadă a funcției,  $T > 0$ . Atunci  $f(\mathbb{N}) = f(\{[0, T] \cap \mathbb{N}\}) = \{f(n) \mid n \in [0, T]\}$  care este mulțime finită. b) Nu. De exemplu  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  care ia numai valorile 0, 1, dar șirul valorilor să fie neperiodic: 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, ... **49.** Fie  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  și  $a \in f(x_0)$ . Dacă  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  rezultă că  $f(x+x_0) = f(x)$ , deoarece  $x_0$  este perioadă. Dar cum  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  avem că  $f(x+x_0) = f(x_0)$ . Așadar  $f(x) = f(x_0) = a$ ,  $\forall x \in \mathbb{Q}$ . Dacă  $x \in \mathbb{Q}$  atunci  $f(x) = f(x + \sqrt{3}) = a$ , deoarece  $x + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ .

Așadar  $f(x) = a$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

**50.** a) Se arată că  $f(x+3) = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . b)  $f(x+2) = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**51.** Dacă  $g(x) = f^2(x-a) - \frac{b^2}{a}$ , rezultă că  $g(x) + f(x+2a) = 0$  și  $g(x+4a) = -g(x+2a) = g(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , deci  $g$  este periodică cu  $T = 4a$ . Din  $g(x) = g(x+4a)$  se obține că  $f^2(x-a) = f^2(x+3a)$  și cum  $f$  este pozitivă rezultă că  $f(x-a) = f(x+3a)$  sau  $f(x) = f(x+4a)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , deci  $f$  este periodică cu  $T = 4a$ . **52.** Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că  $T \in \mathbb{Q}$ ,  $T = \frac{m}{n}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}^+$  și  $(m, n) = 1$ . Deoarece  $T$  este perioadă, atunci  $f(x+nT) = f(x)$  deci  $f(x+m) = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Așadar  $m$  este perioadă a funcției  $f$ . Mai mult, vom

avea că  $f(x+km) = f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Folosind teorema împărțirii cu rest rezultă că dacă  $p \in \mathbb{N}$ , atunci există  $k, r \in \mathbb{N}$  astfel încât  $p = km + r$ ,  $r \leq m - 1$ . Se obține  $f(p) = f(mk + r) = f(r)$ , deci mulțimea  $f(p) \in \{f(0), f(1), \dots, f(m-1)\}$ ,  $\forall p \in \mathbb{N}$ , în contradicție cu ipoteza. Așadar  $T \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

**4.4. Funcții monotone (pag. 107)**

**54.** a), b), c), e), f), crescătoare, iar d) descrescătoare.

**55.** a), b), c), d) crescătoare, iar celelalte monotone.

**57.** Se studiază semnul raportului  $R = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ . **a)**  $R = -\frac{1}{xy}$ . Rezultă că  $f$  este descrescătoare pe fiecare dintre intervalele  $(-\infty, 0)$  și  $(0, +\infty)$ . **b)** Funcția  $f$  este descrescătoare pe fiecare dintre intervalele  $(-\infty, 2)$  și  $(2, +\infty)$ .

**58. d)** Fie  $x < y$ . Atunci  $2^x < 2^y$  și  $x + 2^x < y + 2^y$ , deci  $f(x) < f(y)$ .

**59.** Se obține condiția  $-m \leq 2m + 6$  cu soluția  $m \in [-2, +\infty)$  și  $m = -2$ .

**61. a)** Fie  $x < y$ . Atunci  $f(x) < f(y)$  și  $x + f(x) < y + f(y)$ , deci  $g(x) < g(y)$ .

**d)**  $x < y \Rightarrow ax < ay$  și astfel  $f(x) < f(y)$  și  $f(ax) < f(ay)$ , deci  $g(x) < g(y)$ .

**65.** Fie  $f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$  funcția crescătoare. Funcția  $g(x) = \frac{1}{f(x)} = f(x)$  este tot crescătoare.

**66.** Fie  $T$  perioadă a funcției,  $T > 0$ . Să presupunem că  $f$  este funcție crescătoare. Fie  $x_0 \in \mathbb{R}$  și  $x \in [x_0, x_0 + T]$ . Din  $x_0 \leq x \leq x_0 + T$  și  $f$  crescătoare se obține că  $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_0 + T) = f(x_0)$ , deci  $f(x) = f(x_0)$ ,  $\forall x \in [x_0, x_0 + T]$ . Cum  $f$  este periodică și constantă pe un interval de lungime  $T$ , ea este funcție constantă pe  $\mathbb{R}$ .

**67. a)** Este evident că  $a \in \mathbb{Z}$ . Avem  $f(0) = a$ ,  $f(1) = 1 - a$ ,  $f(2) = 2 + a$ . Cum  $a < 2 + a$  rezultă că  $f$  trebuie să fie crescătoare. Se obține că  $f(0) \leq f(1) \leq f(2)$  și astfel  $a \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ . Cum  $a \in \mathbb{Z}$  rezultă că  $a = 0$ . **b)** Raționând ca la a) se

obține că  $a \leq 1 - a \leq 4 + a$  deci  $a \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right] \cap \mathbb{Z} = \{-1, 0\}$ . **c)** Dacă  $f$  este monotonă ea are aceeași monotonie cu a restricției sale la  $\mathbb{N}$ , deci conform a) este crescătoare și se obține că  $a \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ .

Avem  $-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$ , deci  $f\left(-\frac{1}{n}\right) \leq f\left(\frac{1}{n}\right)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  și se obține că  $a \geq -\frac{1}{n}$ , (1). De

asemenea, din  $1 - \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{n}$  rezultă că  $f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq f\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ , deci  $a \leq \frac{1}{n}$ , (2).

Așadar  $|a| \leq \frac{1}{n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , și astfel  $a = 0$  (contradicție). **d)**  $a = 0$ . **e)** Dacă  $x \in \mathbb{Z}$  rezultă că  $f(x) = x$  și este crescătoare pe  $\mathbb{Z}$ , deci trebuie să fie crescătoare pe

$\mathbb{R}$ . Pentru  $x \in [0, 1)$ ,  $f(x) = (a + 1)x$  și este necesar ca  $a + 1 \geq 0$ . Din  $-\frac{1}{n} < \frac{1}{n}$  și  $f$  este crescătoare se obține că  $a \leq \frac{2}{n-2}$ ,  $\forall n \geq 3$ , dacă  $a \leq 0$ . Așadar  $a \in [-1, 0]$  care se constată că îndeplinește condiția cerută. **f)**  $a \geq 0$ ; **g)**  $a \geq -3$ ; **h)**  $a \in [-1, 1]$ .

**69.** Dacă  $I = [a, b]$  atunci  $f$  are semne contare în punctele din  $\mathbb{Q}$  și  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Cum  $I \cap \mathbb{Q}$ ,  $I \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$  sunt infinite,  $f$  nu poate fi monotonă.

**70. a)** Dacă  $a < 0 < b$  atunci se alege  $n \in \mathbb{N}$  astfel încât  $a < -\frac{1}{n} < 0 < \frac{1}{n} < b$ . Atunci  $f(n+1) = f(n+2) = \dots = 0$ , deci  $f$  se anulează pe  $I$  de o infinitate de ori, deci nu poate fi monotonă, nefiind constantă. **b)** Dacă  $0 < \frac{1}{x} < 1$ , deci  $x \in (1, +\infty)$  avem că  $f(x) = \frac{1}{x}$  și este descrescătoare pe  $(1, +\infty)$ .

**72.** Fie  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  și  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ . Atunci  $a_1 \leq f(a_1) < f(a_2) < \dots < f(a_n) \leq a_n$ . Cum  $f(A) \subset A$  și  $f(A)$  are exact  $n$  elemente trebuie ca  $A = f(A)$  și astfel  $f(a_k) = a_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , deci  $f = I_A$ . **73.** Fie  $f$  funcție crescătoare. Se arată că funcțiile  $g(x) = 2f(x) + x$  și  $h(x) = -f(x) - x$  sunt strict monotone și  $f = g + h$ . Dacă  $f$  este descrescătoare se ia  $g(x) = 2f(x) - x$  și  $h(x) = -f(x) + x$ .

**74. a)** Deoarece  $0 < 1 < 2 < \dots < n < \dots$  ar rezulta că  $f(0) > f(1) > \dots > f(n) > \dots$ . Dar  $\{f(0), f(1), \dots, f(n), \dots\} \subset \mathbb{N}$ , mulțimea  $[0, f(0)] \cap \mathbb{N}$  are un număr finit de elemente și nu putem avea  $\{f(0), f(1), \dots, f(n), \dots\} \subset [0, f(0)]$ .

**b)**  $f(n) = \begin{cases} 3, & n = 0 \\ 0, & n \geq 1 \end{cases}$ ; **e)**  $f(n) = -n$ .

**75.** Fie  $f$  crescătoare. Din  $0 \leq x$  se obține că  $f(0) \leq f(x)$ , iar  $-x \leq 0$  se obține că  $f(-x) \leq f(0)$  sau  $f(x) \leq f(0)$ . Așadar pentru  $x \in [0, +\infty)$ ,  $f(x) = f(0)$ . Analog se arată că  $f(x) = f(0)$  dacă  $x \in (-\infty, 0)$ .

**76.** Fie  $f$  funcție crescătoare și  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Dacă  $f(x_0) \neq x_0$  avem situațiile  $f(x_0) < x_0$  sau  $f(x_0) > x_0$ . Considerăm  $q \in \mathbb{Q}$  cu proprietatea că  $f(x_0) < q < x_0$ , respectiv  $f(x_0) > q > x_0$ . Atunci avem  $f(q) < f(x_0)$ , respectiv

$f(q) > f(x_0)$  sau altfel scris,  $q < f(x_0)$ , respectiv  $q > f(x_0)$ , în contradicție cu alegerea lui  $q$ . Așadar  $f(x_0) = x_0$  etc.

**5. Compunerea funcțiilor (pag. 111)**

**3.** a)  $(f \circ f)(n) = n$ ,  $(f \circ g)(n) = 2n - 1 + (-1)^n$ ,  $(g \circ f)(n) = g(n)$ ,  $(g \circ g)(n) = 4n - 1 + (-1)^n$ . b)  $(f \circ f)(n) = 9n + 2 \cdot (-1)^n$ ;  $(g \circ g)(n) = 16n - 1 + 4 \cdot (-1)^n$ ; c) Șirul valorilor lui  $f \circ f$  este 2, 4, 6, 6, 4, 4, 6, 6, 4, 4, ...

Altfel scris  $(f \circ f)(n) = \begin{cases} 2, n = 0 \\ 4, n = 4k \text{ sau } n = 4k + 1 \\ 6, n = 4k + 2 \text{ sau } n = 4k + 3 \end{cases}$ .  $(f \circ g)(n) = u(4^n)$ ,

$(g \circ f)(n) = 2u(2^n)$ ;

d)  $(f \circ f)(n) = \begin{cases} 3, n \text{ impar} \\ 7, n \text{ par} \end{cases}$ ,  $(f \circ g)(n) = \begin{cases} 3, n = 0 \\ 9, n = 4k \text{ sau } n = 4k + 1 \\ 7, n = 4k + 2 \text{ sau } n = 4k + 3 \end{cases}$ . **5.** a)  $m = 2$ ;

b)  $m = 0$ ; c)  $m \in \mathbb{R}$ ; d)  $m = -4$ . **6.** a)  $m = -2$ ; b)  $m = -\frac{8}{13}$ . **7.**  $f_n(x) = 3^n x + 1 - 3^n$ .

**8.** Dacă  $f$  este monoton crescătoare am avea că  $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \Rightarrow f(f(x)) \leq f(f(y)) \Rightarrow -x + 1 \leq -y + 1$  sau  $x \geq y$ , ceea ce nu se poate. Dacă  $f$  ar fi descrescătoare atunci  $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \Rightarrow f(f(x)) \leq f(f(y)) \Rightarrow x \geq y$ , fals.

**11.** Funcțiile nu sunt monotone, iar  $(f \circ f)(x) = x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**12.**  $m = \frac{1}{3}$ . **13.**  $m = -\frac{4}{5}$ ,  $n = -15$ . **14.** Avem  $g(-4x + 3) = -8x - 11$ . Se notează  $t = 3 - 4x$ , deci  $x = \frac{3-t}{4}$ . Se obține  $g(t) = 2t - 17$ . **15.**  $g(x) = -2x + 4$ .

**16.**  $(f \circ f)(x) = 4 \Rightarrow f^2(x) - 3f(x) - 4 = 0$ , de unde  $f(x) = -1$  și  $f(x) = 4$  cu soluțiile  $x \in \left\{-1, 4, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$ . **17.** a) Funcția  $f(x) = x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , verifică. Dacă am avea  $x_0 \in \mathbb{R}$  cu  $f(x_0) < x_0$  (sau  $f(x_0) > x_0$ ) atunci  $f(f(x_0)) < f(x_0)$  (sau  $f(f(x_0)) > f(x_0)$ ) deci  $x_0 < f(x_0)$  (sau  $x_0 > f(x_0)$ ) ceea ce nu se poate. Așadar  $f = 1_{\mathbb{R}}$  este singura funcție care verifică. b)  $f = 1_{\mathbb{R}}$ .

**18.**  $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$ . **19.** a) Se poate lua  $g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, n \text{ par} \\ a, n \text{ impar} \end{cases}$ , unde

$a \in \mathbb{N}$  oarecare. b) Nu există. Am avea că  $f(g(2k+1)) = 2k+1$  și  $f$  nu poate lua valori impare.

**20.** a) Se poate lua  $g_p(x) = \begin{cases} 2x+1, x = p \\ 2x, x \neq p \end{cases}$  și se observă că  $\left[\frac{g_p(n)}{2}\right] = n$ . b) Nu.

Altfel am avea că  $g\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right) = n$ ,  $n \in \mathbb{N}'$  și de aici pentru  $n \in \{0, 1\} \Rightarrow g(0) = 0$  și  $g(0) = 1$  ceea ce este fals.

**21.** Dacă  $g = f \circ f$  avem că  $g(x) = 3x$  și  $g(f(x)) = 5x$ , deci  $f(x) = \frac{5x}{3}$  care nu

verifică. **22.** Obținem că  $f((f \circ f)(x)) = f(2x) = ax$ , deci  $f(x) = \frac{ax}{2}$ . Funcția  $f$

verifică dacă  $a^2 = 8$ , deci  $a = \pm 2\sqrt{2}$ . **23.** Funcția  $g$  nu poate fi constantă deoarece s-ar obține că  $x = f(g(x)) = f(c)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Din relațiile date avem:  $g(x) = g((f \circ g)(x)) = ((g \circ f) \circ g)(x) = ag(x) + b$ . Dacă  $a \neq 1$  am avea că  $g$  este constantă. Așadar  $a = 1$ ,  $b = 0$ .

**25.** Prin inducție se arată că  $g_n(x) = x + (2^n - 1)[x]$ ,  $n \geq 1$ .

**Teste de verificare (pag. 114)**

**Testul nr. 1**

**1.** a)  $m \in \{-1, 3\}$ ; b)  $m = 1$ . **2.** a)  $a \in \{5, -1\}$ ; b) Cum  $g(x) = -x + 1$  este descrescătoare se pune condiția ca  $a + 1 \leq 2$ , deci  $a \leq 1$ . **3.**  $f$  este funcție pară, deci  $x = 0$  este axă de simetrie. Se pune condiția  $f(m) = 0$ . Se obține  $m \in [-1, 0]$ .

**Testul nr. 3**

**1.**  $a = b = 1$ . **3.**  $f(x) = 2 - x$ ,  $g(x) = 1 - \frac{x}{2}$ . **4.** Perioada principală este  $T = 15$ .

**Testul nr. 4**

**1.** a)  $a = -3$ ; b)  $a \in [0, 2]$ ; c)  $f(x) = \begin{cases} a(x-1), x \leq 1 \\ 0, x > 1 \end{cases}$ . **2.**  $f(n) = \frac{1 + (-1)^n}{2}$ .

**3.** Pentru  $n = 0 \Rightarrow f(f(0)) \leq 0$ , deci  $f(f(0)) = 0$ . Pentru  $n = 1$ ,  $f(f(1)) \leq 1$  și  $f(f(1)) \in \{0, 1\}$ . Convine doar  $f(f(1)) = 1$ . Prin inducție se obține  $f(f(n)) = n$ . Funcția  $f = 1_{\mathbb{N}}$  verifică. Dacă am avea  $f(p) \neq p$ , fie de exemplu,  $f(p) < p$  se obține că  $f(f(p)) < f(p)$  sau  $p < f(p)$ , contradicție. Așadar  $f(p) = p$ ,  $\forall p \in \mathbb{N}$ .

Capitolul III. FUNCȚIA DE GRADUL I

1. Definiția funcției de gradul I. Reprezentare grafică (pag. 116)

3. d) Se obține sistemul de ecuații  $a^2 - a + b = 3$ ,  $ab = 3$  cu soluțiile:

$$(a, b) \in \{(1, 3); (\sqrt{3}, \sqrt{3}); (-\sqrt{3}, -\sqrt{3})\}.$$

4. Se consideră  $f(x) = ax + b$ ,  $a \neq 0$ .

a) Se obține egalitatea  $a(2x - 3) + b + 2[a(x + 1) + b] = 3x - 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Se găsește

$$f(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{12}. \quad \text{b) } a(ax + b) + b + 2(ax + b) = 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a(a + 2) = 0, a \neq 0 \text{ și}$$

$ab + 3b = 1$ . Se găsește  $f(x) = -2x + 1$ . 8. a)  $m \in \{0, -2\}$ ; b)  $m \in \{0, -2\}$ .

9.  $f(x) = x$  sau  $f(x) = -x + b$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . 11.  $a = 1$ ,  $a = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$ .

$$12. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} -1, & x \in \left[-2, -\frac{3}{2}\right) \\ 0, & x \in \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\ 1, & x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ 2, & x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \\ 3, & x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right] \end{cases} ; \text{ b) } f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x \in [1, \sqrt{2}) \\ 2, & x \in [\sqrt{2}, \sqrt{3}) \\ 3, & x \in [\sqrt{3}, 2) \\ 4, & x = 2 \end{cases}.$$

13. a)  $m^2 - 3m + 2 = 0$ ,  $m \in \{1, 2\}$ . b)  $A(0, m^2 + 4m - 5)$ . Se obține ecuația

$$|m^2 + 4m - 5| = 8. \quad \text{c) Se pune condiția } OA = AB, A \neq B. \quad 14. a \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right\}.$$

15. a)  $f(a + 1) = a + 10 \Rightarrow 1 - (a + 1) = a + 10 \Rightarrow a = -5$ ; b)  $a = 4$ ; c)  $a \in \emptyset$ .

16. a) Se rezolvă sistemul  $f(-1) = 1$ ,  $g(-1) = 1$ .

17. a)  $f(m) = -5$  și  $m < -\frac{1}{2} \Rightarrow m = -1$ . 18. a)  $f(0) = m^2 + 4 \Rightarrow m \in \{2, 3\}$ .

$$20. f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{11}{3}. \quad 21. f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x \geq 0 \\ x + 3, & x < 0 \end{cases}. \quad 22. f(x) = \begin{cases} -x + 2, & x \in (-\infty, -1) \\ 3, & x \in [-1, 1] \\ x + 2, & x \in (1, +\infty) \end{cases}.$$

$$23. f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < -1 \\ 2, & x \in [-1, 0) \\ -2, & x \in [0, 1] \\ x - 2, & x \in (1, +\infty) \end{cases}. \quad 24. \text{ a) } f(x) = 3|x - 4| - 2|x - 2|.$$

25. Cazul I.  $M(-1, 2) \in G_f \cap G_g \Rightarrow f(-1) = g(-1) = 2 \Rightarrow a = 1, b = 3$ .

Cazul II.  $N(1, -1) \in G_f \cap G_g \Rightarrow f(1) = g(1) = -1 \Rightarrow a = -\frac{5}{2}, b = \frac{3}{2}$ .

26. Presupunem prin absurd că  $f(x) \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{R}$ . Atunci  $f(\sqrt{2}) = a\sqrt{2} + b \in \mathbb{Q}$ ,  $f(-\sqrt{2}) = -a\sqrt{2} + b \in \mathbb{Q}$ . Rezultă că  $f(\sqrt{2}) + f(-\sqrt{2}) = 2b \in \mathbb{Q}$ , deci  $b \in \mathbb{Q}$  și ca urmare  $a\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ . Dar  $f(1 + \sqrt{2}) = a\sqrt{2} + a + b \in \mathbb{Q}$  și deoarece  $a\sqrt{2} + b \in \mathbb{Q}$ , rezultă că  $a \in \mathbb{Q}$ , ceea ce contrazice faptul că  $a\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ . În concluzie  $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  astfel încât  $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

2. Monotonia funcției de gradul I (pag. 120)

4. Se pun condițiile:  $m < 0$ ,  $f(4m - 5) = m$ .

5. Se pun condițiile  $m > 0$ ,  $f(m - 2) = m - 3$ .

6. a)  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbb{R}$  pentru orice  $m \in \mathbb{R}$ .

c)  $-2ab + a^2 + b^2 = (a - b)^2 \geq 0, \forall a, b \in \mathbb{R}$  și  $f$  este crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .

d)  $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0, \forall a, b \in (0, +\infty)$  și  $f$  este crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .

7. a)  $a = 5$ ; b)  $2 - a < 0$  și  $(2 - a)2 - 5 \geq -14 + a \Rightarrow a \in \left(2, \frac{13}{2}\right]$ .

8. a)  $a \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ .

10. a) Condiția:  $5 - a \geq 0, 5a - 3 \geq 0, \frac{(5-a)}{2} - 1 \leq \frac{5a-3}{2} + 2a - 7, a \in \mathbb{Z}$ ;

b)  $A(0, -1), B(1, 4)$ . 11. a)  $m \in \emptyset$ ; b)  $m \in \left[3, \frac{10}{3}\right]$ .

13.  $f(f(x)) = a^2x, a \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{Q}$ . 14.  $m = 1$ .

3. Semnul funcției de gradul I. Inecuații de gradul I (pag. 122)

6. a)  $f(-1) = 0 \Rightarrow m = -1$ ; b)  $m = \frac{3}{2}$ ; c)  $m = 2$ ; d)  $m = 3$ .

7. a) Dacă  $m = 1 \Rightarrow f(x) = 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Dacă  $m - 1 > 0, f(x) \leq 0$  pentru  $x \in \left(-\infty, -\frac{m}{m-1}\right]$  și  $f(x) \geq 0$  pentru  $x \in \left[-\frac{m}{m-1}, +\infty\right)$ . Dacă  $m - 1 < 0, f(x) \geq 0$  pentru  $x \in \left(-\infty, -\frac{m}{m-1}\right)$  și  $f(x) \leq 0$  pentru  $x \in \left[-\frac{m}{m-1}, +\infty\right)$ .

10. a) Se rezolvă inecuația  $\frac{m}{m+3} > 0$ . 15. a) Se pun condițiile  $m+3 < 0$ ,  $-\frac{2}{m+3} \leq 1$ ; b)  $3-m > 0$ ,  $\frac{m}{3-m} \geq -2$ ; c) Dacă  $m+1 > 0$ , atunci  $\frac{-m-8}{m+1} \leq -2$ .  
Dacă  $m+1 < 0$ , atunci  $5 \leq \frac{-m-8}{m+1}$ .  
Dacă  $m = -1$ , atunci  $f(x) = 7 > 0$  pe  $\mathbb{R}$ .

4. Poziții relative a două drepte. Sisteme de ecuații liniare (pag. 125)

5. a)  $a \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{7}\}$ ; b)  $m \in \mathbb{Q}$ . 6. a) Sistemul este compatibil determinat pentru  $a \neq \pm 5$ . Probabilitatea cerută este  $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ . b) Pentru  $m = 5$  sistemul este nedeterminat și probabilitatea este  $\frac{1}{4}$ . c) Pentru  $m = -5$  sistemul este incompatibil și probabilitatea este  $\frac{1}{4}$ . 7. b)  $m = -\frac{3}{4}$ .

5. Sisteme de inecuații de gradul I (pag. 126)

9. a) Dacă  $\frac{2x+3}{5} < \frac{x-1}{2}$ , adică  $x \in (11, +\infty) \Rightarrow I \cap J = \emptyset$ .

Dacă  $x \in (-\infty, 11] \Rightarrow I \cap J = \left[\frac{x+1}{2}, \frac{2x+3}{5}\right]$ .

b) I și J există pentru  $x \geq 2$  și  $I \cap J = \left[\frac{2x-1}{3}, \frac{3x-2}{5}\right]$ .

10. Se pun condițiile:  $f(-3) > 0$ ,  $f(1) > 0$ ,  $g(-3) > 0$ ,  $g(1) > 0$ .

11. a) Condiții:  $f(-4) < 0$ ,  $f(-1) < 0$ ,  $g(-4) < 0$ ,  $g(-1) < 0$ . b) Deoarece  $g(-1) = -3$ , se pun condițiile:  $g(2) < 0$ ,  $f(-1) > 0$ ,  $f(2) > 0$ .

74. Se pune condiția  $f(0) \cdot g(0) < 0$ .

Teste de verificare (pag. 128)

Testul nr. 2

2. Din relația dată rezultă  $f(x) \geq x - a$ . Din  $f(x+a) \leq x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = f(x-a+a) \leq x+a$ . Așadar  $f(x) = x - a$ .

III. FUNCȚIA DE GRADUL AL DOILEA

1. Definiția funcției de gradul a doilea. Reprezentare grafică (pag. 129)

1. Fie  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ . a) Condițiile devin:  $c = 1$ ,  $a + b + c = 3$ ,  $4a + 2b + c = 7$ . Se obține  $f(x) = x^2 + x + 1$ . b)  $f(x) = x^2 + x + 1$ ; c)  $f(x) = x^2 - 1$ ; d)  $f(x) = -x^2 + 4x - 2$ .

3. Avem condițiile  $f(1) = 0$ ,  $f(2) = 9$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ . Se obține  $f(x) = 7x^2 - 12x + 5$ .

5. Pentru funcția de gradul a doilea avem  $f(\mathbb{R}) = \begin{cases} \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right), & a > 0 \\ \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right], & a < 0 \end{cases}$

7. Se pun condițiile  $-\frac{b}{2a} = 5$ ,  $-\frac{\Delta}{4a} = -23$ ,  $f(0) = 2$ .

9. Se pun condițiile  $f(-5) = 0$ ,  $-\frac{b}{2a} = -5$ ,  $f(-3) = 4$  și se obține  $f(x) = x^2 + 10x + 25$ . 11.  $f(x) = (x+3)^2 + (2x+1)^2 - 2(x-1)^2 - 2(2x-2)^2$ .

12.  $f(x) = na^2x^2 - 2ax \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

13. a)  $x = 0$ ; b)  $x = 1$ ; c)  $x = 1$ ; d)  $x = -3$ .

16. Se rezolvă condițiile:  $a > 0$ ,  $-\frac{\Delta}{4a} = 6,2$ ;  $f(1) = 7$  și  $-\frac{b}{2a} = 0,6$ .

17. Avem  $b = a + 2$ ,  $c = a + 4$ ,  $-\frac{b}{2a} = -0,7$  și se obține  $f(x) = 5x^2 + 7x + 9$ .

18.  $f(x) = -x^2 + \frac{x}{3} - \frac{1}{9}$ .

28. a) Coordonatele vârfului sunt:  $x_v = \frac{m+1}{1-m}$ ,  $y_v = \frac{3m+1}{1-m}$ . Eliminând pe  $m$  se obține  $y_v = 2x_v - 2$ , adică vârful  $V$  se află pe dreapta de ecuație  $y = 2x - 1$ .

29. a) Avem  $V(1-m, -m^2+m+1)$ . Eliminând pe  $m$  între coordonatele punctului  $V$  se obține parabola de ecuație  $y = x^2 + x + 1$ .

30. Fie  $A(\alpha, \beta)$  punctul comun. Rezultă că  $f(\alpha) = \beta$ ,  $\forall m \in \mathbb{R}$ . Se obține  $m(2-2\alpha) + \alpha^2 - 2\alpha - \beta = 0$ ,  $\forall m \in \mathbb{R}$ , relație din care rezultă  $A(1, -1)$ .

2. Relațiile lui Viète (pag. 134)

6. a) Avem:  $x_1 + x_2 = \frac{m+1}{m}$  și  $x_1x_2 = \frac{3}{m}$ . Înlocuind în prima relație  $m = \frac{3}{x_1x_2}$

se obține relația independentă de  $m$ :  $3(x_1 + x_2 - 1) = x_1x_2$ .

**7.**  $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4(x_1 + x_2) - 2x_1x_2 + 8$ . Înlocuind  $x_1 + x_2 = m$  și  $x_1x_2 = \frac{7-4m}{2}$  se obține concluzia. **8.**  $b = 0$  și  $ac < 0$ .

**9. a)**  $a = 4, b = 7$ ; **b)**  $[(x_1 - y_1)(x_2 + y_2)](x_2 - y_1)(x_1 + y_2) = (x_1x_2 - y_1x_2 + x_1y_2 - y_1y_2)(x_1x_2 - y_1x_1 + x_2y_2 - y_1y_2)$ . Se folosesc relațiile lui Viète și se obține  $b^2 - a^2$ .

**11.** Punem condiția ca  $x_1 = a$  să fie soluția comună. Se obține  $x_1 = c$ , iar celelalte soluții sunt  $x_2 = -a - c$ , respectiv  $x_3 = -b - c$ . Pentru  $x_1 = c$  soluție a ecuațiilor date se obține  $a + b + c = 0$ , apoi se verifică ușor că  $x_2, x_3$  sunt soluții ale ecuației  $x^2 + cx + ab = 0$ .

**12.** Natura și semnul soluțiilor ecuației de gradul al doilea se studiază folosind semnul elementelor:  $\Delta = b^2 - 4ac, S = -\frac{b}{a}$  și  $P = \frac{c}{a}$  (relațiile lui Viète).

Exemplificarea pentru punctul b). Avem  $\Delta = -8m + 4, S = 2(m - 1), P = m^2$ .

Stabilim semnul lui  $\Delta, S, P$  în funcție de tabelul de variație.

Concluziile sunt:

- pentru  $m \in (-\infty, 0), \Delta < 0, S < 0, P > 0$ . Rezultă că ecuația are două soluții  $x_1, x_2$  reale și diferite, ambele fiind negative.
- pentru  $m = 0, \Delta = 0, S < 0, P > 0$ . Rezultă că ecuația are două soluții reale și egale, negative.
- pentru  $m > 0, \Delta < 0$  și ecuația nu are soluții reale.

**14. a)** Condiții:  $\Delta > 0, P < 0$ . Se obține  $m \in (0, 3)$ .

**b)** Condiții:  $\Delta > 0, P > 0, S > 0$ . Se obține  $m \in (-1, 0) \cup (3, +\infty)$ .

**15. a)** Condiții:  $\Delta > 0, P > 0, S < 0$ . **b)** Nu ( $P > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ ).

**16.** Avem condițiile:  $x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = \frac{b+c}{2}, b = \frac{x_1+x_2}{2}, x_1+x_2 = -\frac{b}{a}$ .

Din ultimele două egalități rezultă  $b = 0$  sau  $a = -\frac{1}{2}$ . Pentru  $b = 0$  se obține

$a = \pm 2$  și  $c = \mp 2$ . Pentru  $a = -\frac{1}{2}$  se obține  $4b - 5c = -1$  etc.

**17.** Se analizează semnul lui  $S$  și  $P$  (relațiile lui Viète).

**19.** Se notează  $x = y + 1$  și pentru ecuația de gradul al doilea în  $y$  se pune condiția ca soluțiile  $y_1, y_2$  să verifice  $y_1 < 0, y_2 > 0$ , adică  $\Delta > 0$  și  $P < 0$ .

**20.** Se procedează ca la 54, făcând schimbare de variabilă.

**22. a)** Dacă  $x_1, x_2$  sunt soluțiile reale ale ecuației ( $\Delta \geq 0$ ) problema revine la a determina  $m$  pentru care  $x_1 < 1 < x_2$  sau  $1 < x_1 \leq x_2$ . **b)** Se pun condițiile  $\Delta > 0, x_1 > 2, x_2 > 0$  și se folosește schimbarea de variabilă  $y = x - 2$ . **c)** Avem

condițiile  $\Delta > 0, 1 < x_1 < x_2 < 4$ . Se face schimbarea de variabilă  $z = \frac{x-1}{x-4}$ , iar pentru ecuația de gradul al doilea în  $z$  care se obține, cu soluțiile  $z_1, z_2$ , se pun condițiile  $\Delta > 0, z_1 < 0, z_2 < 0 \Leftrightarrow \Delta > 0, P > 0, S < 0$ . **d)** Dacă  $x_1, x_2$  sunt soluțiile ecuației se pun condițiile:  $\Delta = 0, x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} > 1$  sau  $\Delta > 0, x_1 < 1 < x_2$  și se procedează ca și la exercițiile anterioare.

**23. a)**  $S_1 = x_1 + x_2 = 6; S_2 = x_1^2 + x_2^2 = S_1^2 - 2x_1x_2 = 28, S_3 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3(x_1 + x_2) \cdot x_1x_2 = 144$ . **b)** Avem:  $x_1^2 - 6x_1 + 4 = 0, x_2^2 - 6x_2 + 4 = 0$ . Înmulțind cu  $x_1^n$ , respectiv  $x_2^n$  și însumând se obține  $S_{n+2} = 3S_{n+1} - 4S_n$ . **c)** Se folosește inducția matematică.

**24. a)** Sistemele de ecuații sunt sisteme simetrice în  $x$  și  $y$ . Se folosesc notații de felul  $x + y = S, xy = P$  și formule de tipul  $x^2 + y^2 = S^2 - 2P; x^3 + y^3 = S^3 - 3SP, x^4 + y^4 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$  etc.

### 3. Monotonia funcției de gradul al doilea (pag. 138)

**2. b)** Dacă  $m = 0$ , funcția este crescătoare pe  $\mathbb{R}$ . Dacă  $m \in (-\infty, 0)$ ,  $f$  este crescătoare pe  $(-\infty, -\frac{2}{m}]$  și descrescătoare pe  $[-\frac{2}{m}, +\infty)$ . Dacă  $m \in (0, +\infty)$   $f$  este descrescătoare pe  $[-\frac{2}{m}, +\infty)$  și crescătoare pe  $(-\infty, -\frac{2}{m}]$ . **c)** Se discută pentru  $m \in (-\infty, 1), m = 1, m \in (1, +\infty)$ . **d)** Se disting cazurile  $m \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty), m \in \{2, 3\}, m \in (2, 3)$ .

**3. a)** Se pune condiția  $-5 \leq -\frac{b}{2a} = m$ . **b)** Condiția este  $-\frac{b}{2a} \leq -2$  și rezultă  $m \leq -2$ . **c)** Condiția este  $-\frac{b}{2a} = 2$  și  $m < 0$ .

**4.** Se pun condițiile  $-\frac{b}{2a} = 5$  și  $-\frac{\Delta}{4a} = -9$ . Se obține  $f(x) = x^2 - 10x + 16$ .

**6.** Se pun condițiile  $m < 0, -2 \geq mx + 1 \geq -7, \forall x \in [1, 2]$ . Rezultă  $m \in [-4, -3]$ .

**7.** Se pun condițiile  $a > 0, -1 \leq a \cdot 0 + b$  și  $a + b \leq 1$ , deci  $a > 0, b \geq -1, a + b \leq 1$ .

**8. a)**  $f(x) = \frac{x^2 - 18x + 3}{12}$ ; **b)**  $f(x) = \frac{x^2 - 11x + 12}{6}$ .

$$70. \text{ a) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \leq 1 \\ -1, & x > 1 \end{cases}; \text{ b) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 3, & x \leq -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{4}, & x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ x^2 - x + 1, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases};$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x + 3, & x \leq 2 \\ 7, & x > 2 \end{cases}. \quad 71. \quad m \geq 1.$$

72. Pentru  $m = 3$ ,  $f$  este crescătoare. Pentru  $m \neq 3$  se pun condițiile:  
 $m - 3 > 0$ ,  $f(-1) > f\left(\frac{3}{2}\right)$ ,  $\frac{3}{2} \geq -\frac{b}{2a}$  sau  $m - 3 < 0$ ,  $f(-1) > f\left(\frac{3}{2}\right)$  și  $-\frac{b}{2a} \leq -1$ .

73. Condiții  $f(-3) < f(-1)$ ,  $-\frac{b}{2a} \leq -3$ ,  $m > 0$  sau  
 $m < 0$ ,  $f(-3) < f(-1)$ ,  $-1 \leq -\frac{b}{2a}$ .

**4. Semnul funcției de gradul al doilea  
 Inecuații de gradul al doilea (pag. 138)**

2. Se alcătuieste tabelul de semn.

g)  $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 9)$  etc. h)  $f(x) = (x^2 - 16)(x^2 - 1)$  etc.

5. Se folosește tabelul de semn.

Soluția inecuației este  $x \in [0, 1] \cup [2, +\infty)$ .

e) Se aduce inecuația la o formă mai simplă. Se obține:

$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{3x}{x+3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2 - 2x - 2}{(x+1)(x+2)} \geq 0 \text{ și se alcătuieste tabelul de semn. Se obține } x \in (-2, -1).$$

6. a) Se notează  $x^2 - 3x = y$  și rezultă că  $y^2 - 2y - 8 \leq 0$  echivalentă cu  $(y+2)(y+4) \leq 0$  sau  $(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 3x - 4) \leq 0$  etc.

b) Se scrie  $(x^2 - 9)(x^2 - 16) \geq 120$  și cu  $y = x^2$  rezultă inecuația:

$$y^2 - 25y + 24 \geq 0 \text{ sau } (y-1)(y-24) \geq 0, \text{ deci } (x^2 - 1)(x^2 - 24) \geq 0 \text{ etc.}$$

c) Se scrie  $(x-5)(x-2)(x-4)(x-3) < 8$  sau  $(x^2 - 7x + 10)(x^2 - 7x + 12) < 8$  și se notează  $y = x^2 - 7x + 10$  etc.

d) Se notează  $x^2 - 3x - 4 = y$  și rezultă cp  $y^2 + 3y - 4 \leq 0$  etc.

e) Deoarece  $x^2 + x + 2 > 0$  se obține că  $8x^2 \geq (x^2 + 2)^2 - x^2$  și se notează  $x^2 = y$

etc. f)  $y = \frac{3x-7}{x-3}$ ; g)  $x^2 + x = y$  și se obține că  $y^2 + y - 2 \geq 0$ .

8. a) Se pun condițiile  $m - 1 > 0$ ,  $\Delta \leq 0$ . b)  $m < 0$ ,  $\Delta \leq 0$ ; c)  $m - 1 < 0$ ,  $\Delta \leq 0$ .

9. a) Condiții  $x^2 + mx + m^2 - m \geq 0$  și  $x^2 + 4mx + 5m^2 + 3 > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , deci  $\Delta_1 \leq 0$ ,  $\Delta_2 < 0$ .

10. a) Fie  $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ . Se obține ecuația  $yx^2 - x + y = 0$ , cu necunoscuta  $x$ .

Cum  $x \in \mathbb{R}$  se impune condiția  $\Delta \geq 0$ . Se obține că  $1 - 4y^2 \geq 0$  cu soluția

$$y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \text{ deci } \text{Im } f = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \text{ b) } \left[-1, \frac{1}{3}\right]; \text{ c) } \left[\frac{3-2\sqrt{3}}{3}, \frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right];$$

$$\text{d) } \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]; \text{ e) } \left[\frac{1}{2}, 2\right]; \text{ f) } \left[\frac{1}{3}, 3\right].$$

11. a) Inecuația nu are nicio soluție dacă  $(m+1)x^2 + mx + m \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , deci  $m+1 > 0$ ,  $\Delta = m^2 - 4m(m+1) \leq 0$ . Se obține  $m \in (0, +\infty)$ .

b) Condiții:  $m^2 - m - 2 < 0$ ,  $\Delta \leq 0$ ; c)  $m > 0$ ,  $\Delta \leq 0$ .

13. a) Condiții:  $m - 2 < 0$ ,  $\Delta = (m-3)^2 - 4(m-2)(m-3) < 0$ .

Rezultă că  $m \in \left(\frac{5}{3}, 2\right)$ . b) Condiții:  $(2m+1) > 0$ ,  $\Delta < 0$ ; c)  $m^2 - 3m > 0$ ,  $\Delta < 0$ ;

d)  $m - 3 > 0$ ,  $\Delta < 0$ .

14. a) Deoarece  $x^2 - 5x + 8 > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , este necesară condiția:

$$(m-1)x^2 + 2mx + 9m - 5 < 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Rezultă că  $m - 1 < 0$ ,  $\Delta = 4m^2 - 4(m-1)(9m-5) < 0$  etc.

b) Avem că  $x^2 + 3x + 3 > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Folosind proprietatea modulului avem că:

$$-3(x^2 + 3x + 3) \leq x^2 - (m+2)x + m + 2 \leq 3(x^2 + 3x + 3), \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Se obține că } \begin{cases} 4x^2 + (7-m)x + m + 11 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ 2x^2 + (m+11)x + 7 - m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ etc.}$$

c) Numărul este egal cu  $x^2 + (mx-1)^2 > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Se continuă ca la punctul b).

15. a)  $m^2 - 3m > 0$  și  $\Delta \leq 0$  sau  $m = 3$  când inecuația se scrie  $2 < 0$ .

b) Soluțiile ecuației sunt 1 și 3. Se obține  $m = 2$ .

c) Ecuația atașată are soluțiile  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 4$ . Rezultă că  $m = 5$ .

16. a)  $a + 3 < 0$ ,  $\Delta < 0$ . b)  $a + 3 > 0$ ,  $\Delta < 0$  sau  $a + 3 > 0$ ,  $\Delta \geq 0$  și  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ .

Se obțin condițiile  $a + 3 > 0$ ,  $\Delta < 0$  sau  $a + 3 > 0$ ,  $\Delta \geq 0$ ,  $\frac{a+4}{a+3} \geq 0$ .

17. a) Condiții  $\Delta > 0$ ,  $|x_1 - x_2| = 3$ . Se obține că  $\Delta > 0$  și  $\sqrt{\Delta} = 6$  cu soluția  $m \in \{-1, 19\}$ . c) Condiții  $\Delta < 0$  sau  $\Delta \geq 0$ ,  $x_1 \leq 0$ ,  $x_2 \leq 0$ .

18. Ecuația  $f(x) = 0$  nu are soluții sau are soluții negative. Rezultă că  $\Delta < 0$  sau  $\Delta \geq 0$ ,  $x_1 \leq 0$ ,  $x_2 \leq 0$  sau altfel scris:  $\Delta < 0$  sau  $\Delta \geq 0$ ,  $x_1 + x_2 \leq 0$ ,  $x_1 x_2 \geq 0$  etc.

**19. a)** Condiții:  $\Delta > 0$ ,  $x \in [-1, 1]$ ,  $x_2 \in (-1, 1)$ , deci  $\Delta > 0$ ,  $x_1 + x_2 \in (-2, 2)$ ,  $x_1 x_2 \in (-1, 1)$ . Dar  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ,  $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$  etc.

**22.** Se impun condițiile  $-3 \leq f(x) \leq 2$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , care conduc la relațiile:

$$4x^2 - (m+9)x + m + 9 \geq 0, x^2 + (m-6)x + 6 - m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Rezultă că  $\Delta_1 = (m+9)^2 - 16(m+9) \leq 0$  și  $\Delta_2 = (m-6)^2 - 4(6-m) \leq 0$ , cu soluția  $m \in [2, 6]$ .

**23.**  $f(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , dacă  $(2m+3)x^2 - (m+2)x - m - 1 \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  și  $x^2 + (m-3)x - m^2 + 3m > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  etc.

**25.** Trebuie ca  $f(x) < 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Deoarece  $x^2 - 2(m-3)x + m - 1$  nu poate fi negativă pe  $\mathbb{R}$  avem condițiile  $x^2 - 2(m-3)x + m - 1 > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , și  $(m-2)x^2 - (m-2)x + 1 < 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  etc.

**26. a)** Avem  $x^2 - 5x + y^2 - 3y + m > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Rezultă că  $\Delta_x = 25 - 4(y^2 - 3y + m) < 0$ ,  $\forall y \in \mathbb{R}$ , deci  $-4y^2 + 12y + 25 - 4m < 0$ ,

$\forall y \in \mathbb{R}$ . Se pune condiția  $\Delta_y = 144 + 16(25 - 4m) < 0$  cu soluția  $m \in \left(\frac{17}{2}, +\infty\right)$ .

**27.** Fie  $f(x) = y \in \text{Im } f$ . Se obține ecuația  $(y-a)x^2 + bx + y - 1 = 0$  care trebuie să aibă soluții reale numai pentru  $y \in \text{Im } f$ .

Rezultă că  $\Delta = b^2 - 4(y-a)(y-1)$  este pozitiv numai pe intervalul  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$ ,

deci ecuația  $\Delta = 0$  are soluțiile  $y_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $y_2 = \frac{5}{2}$ . Se obține  $\begin{cases} b^2 = 6a + 3 \\ b^2 = 15 - 6a \end{cases}$  și prin

adunare  $b^2 = 9$ ,  $b \in \{-3, 3\}$ . Rezultă că  $a = 1$ ,  $b = 3$  sau  $a = 1$ ,  $b = -3$ .

**28.** Fie  $y = f(x)$ . Rezultă ecuația  $(y-1)x^2 + (3-4y)x + 4y = 0$ , care admite soluții reale dacă  $\Delta \geq 0$ , deci  $y \in \left[-\infty, \frac{9}{8}\right]$ . Așadar  $\text{Im } f = \left[-\infty, \frac{9}{8}\right]$ .

### 5. Poziția relativă a unei drepte față de o parabolă (pag. 144)

**2. a)** Sistemul de ecuații:  $y = x^2 + mx + 1$ ,  $y = x + m$ , (1), are soluție unică dacă și numai dacă ecuația  $x^2 + (m-1)x + 1 - m = 0$  are soluție unică dacă și numai dacă  $\Delta = 0 \Leftrightarrow m \in \{-3, 1\}$ . **b)** Sistemul are două soluții distincte dacă și numai dacă  $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ ; c)  $\Delta < 0 \Leftrightarrow m \in (-3, 1)$ .

**4.** Se obține ecuația de gradul al doilea  $x^2 + (2m-1)x + 1 = 0$ , cu  $\Delta = (2m-3)(2m+1)$ .

Dacă  $\Delta > 0$ , adică  $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ , dreapta este secantă parabolei.

Dacă  $\Delta = 0$ , adică  $m \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$ , dreapta este tangentă parabolei.

Dacă  $\Delta < 0$ , adică  $m \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ , dreapta este exterioară.

**7.** Ecuația  $f(x) = 0$  are  $\Delta = 4$ , deci are două soluții reale și diferite. Rezultă că axa  $Ox$  este secantă parabolei  $G_f$ . Ecuația  $g(x) = 0$  are  $\Delta = (m+1)(m-15)$ , iar poziția axei  $Ox$  față de  $G_g$  se stabilește după cum  $\Delta > 0$ ,  $\Delta = 0$ ,  $\Delta < 0$ . Ecuația  $h(x) = 0$  are  $\Delta = 4(m-4)(m-7)$  și se face discuție după semnul lui  $\Delta$ .

**9. a)** Fie dreapta  $y = ax + b$  care conține punctul  $A(2, 0)$ . Rezultă că  $0 = 2a + b$ , adică  $b = -2a$  și ecuația dreptei este  $y = ax - 2a$ . Punem condiția ca dreapta să fie tangentă parabolei. Se obține ecuația  $x^2 - (3+a)x + 2 + 2a = 0$ , cu  $\Delta = 0$  și se găsește  $a = 1$ . Așadar tangenta are ecuația  $y = x - 2$ .

**10.** Sistemul de ecuații nu are soluții reale.

**11.**  $y = ax^2 + \frac{1}{4a}$ ,  $a \neq 0$ .

**12.** Se obțin  $y = ax^2 + \frac{x}{2} + \frac{9-32a}{16a}$  cu vârfurile  $V\left(-\frac{1}{4a}, \frac{1}{2a} - 2\right)$  care se găsesc pe dreapta  $y = -2x - 2$ .

**13.**  $m \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ .

**15. a)** tangentă; **b)** Vârfurile se află pe parabola  $y = -x^2 + 2x + 2$ .

**17.** Condiții:  $m - 1 < 0$  și ecuația  $f(x) = x$  să nu aibă soluții reale.

**18.** Dacă  $m > 1$ , se pune condiția ca ecuația  $f(x) = y$  să nu aibă soluții reale.

Dacă  $m < 1$  se pun condițiile  $m > 0$  și ecuația  $f(x) = y$  să nu aibă soluții reale. Dacă  $m = 1$ ,  $f(x) = x^2 + 2 > 0$  și  $G_f$  este deasupra dreptei  $y = 0$ .

### 6. Poziția relativă a două parabole (pag. 146)

**6. a)** Punctul de tangentă este  $A(m, m^2)$ .

**b)** Ecuația tangentei este  $y = 2mx - m^2$ .

**7. a)** Tangentele comune au ecuațiile  $y = 0$ ,  $y = -4x$ .

**c)** Din condițiile de tangentă se obțin relațiile:  $c = -a$ ,  $b^2 + 4b + 4a^2 = 0$ ,  $a \in [-1, 1]$ .

**Capitolul V. PROBLEME RECAPITULATIVE DE ALGEBRĂ (pag. 150)**

**R1.** Se are în vedere că  $2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \in \mathbb{Q}$ .

**R2.** Dacă  $n^2 + 1 = m^2$  se obține că  $(m - n)(m + n) = 1$  și  $m - n = \pm 1$ ,  $m + n = \pm 1$ , cu soluția  $n = 0$ . Dacă  $n \in \mathbb{Q}$  se poate lua  $m - n = a$ ,  $m + n = \frac{1}{a}$  și se obține că  $n = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} - a \right)$ ,  $a \in \mathbb{Q}$  etc. **R3.** Se folosește metoda reducerii la absurd. **R4.** Se

obține prin ridicare la pătrat  $3b^2 + 5c^2 + 2bc\sqrt{15} = 2a^2$ , cum  $a, b, c \in \mathbb{Q}$  este necesar ca  $bc = 0$ , deci fie  $b = 0$ , fie  $c = 0$  etc. Se obține  $a = b = c = 0$ .

**R5.** Fie  $x + y\sqrt{5} \in A$  și  $u + v\sqrt{5} \in A$ . Deoarece  $(x + y\sqrt{5})(u + v\sqrt{5}) = xu + 5yv + (xv + yu)\sqrt{5} \in A$  rezultă că  $(xu + 5yv)^2 - a(xv + yu)^2 = 1$  și având în vedere că  $x^2 - ay^2 = 1$ ,  $u^2 - av^2 = 1$  se obține  $a = 5$ . **R6.** Se folosește identitatea:  $a^3 + b^3 + c^3 - (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 3abc$  și problema R1.

**R7.**  $A = 4(y^2 - xy + x^2)^2$ . **R8.**  $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b - c)^2$ .

**R9.** Pentru  $x \in \{0, 1, -1\}$  rezultă că  $\{a + b + c, a - b + c, c\} \in \mathbb{Q}$ , deci  $a + b \in \mathbb{Q}$ ,  $a - b \in \mathbb{Q}$ . Prin adunare și scădere rezultă că  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Pentru  $x = \sqrt{2}$  rezultă că  $2a + c + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ , deci  $b = 0$ , iar pentru  $x = (1 + \sqrt{2})$  se obține că  $a(3 + 2\sqrt{2}) + c \in \mathbb{Q}$ , deci  $a = 0$ . **R11.** Inegalitatea se aduce la forma  $z(ay - ax)^2 + y(cx - az)^2 + x(cy - bz) \geq 0$ . **R12.** Se notează  $a + b = x^2$ ,  $b + c = 1 - y^2$ ,  $c + a = 2 - z^2$ . Se obține că  $2a = x^2 - y^2 + z^2 + 1$ ,  $2b = x^2 + y^2 - z^2 - 1$ ,  $2x = y^2 - x^2 + z^2 + 3$ . Prin substituție rezultă egalitatea  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 0$ , deci  $x = y = z = 1$  și  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = 2$ . **R14. a)**  $x = 0$ ; **b)**  $x = 0$ ; **c)**  $x \in \left\{1, \frac{11}{5}\right\}$ ; **d)**  $x = 0$ ; **e)**  $x \in \left\{\frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}\right\}$ ; **f)**  $x = 1$ .

**R15. a)** Dacă  $x \geq 0$  soluția este  $x = m - 2 \geq 0$ , pentru  $m \in [2, +\infty)$ . Dacă  $x < 0$  soluția este  $x = 2 - m \leq 0$ , pentru  $m \in [2, +\infty)$ . **b)** Deosebim cazurile:  $x \in [1, +\infty)$ . Ecuația se scrie  $x - 1 = x + m$  sau  $m = -1$ . Dacă  $m = -1$ , soluția este  $x \in [1, +\infty)$ . Dacă  $m \neq -1$ , atunci  $x \in \emptyset$ . Cazul  $x \in (-\infty, 1)$ . Ecuația se scrie  $1 - x = x + m$ , cu soluția  $x = \frac{1 - m}{2}$ . Condiția  $x < 1$  impune  $\frac{1 - m}{2} < 1$ , deci  $m > -1$ . Așadar, pentru  $m \in (-\infty, -1)$  ecuația nu are soluție. Pentru  $m = -1$ , soluția este  $x \in [1, +\infty)$ . Pentru  $m \in (-1, +\infty)$  soluția este  $x = \frac{1 - m}{2}$ . **c)** Cazul  $x \in (-\infty, m]$ . Ecuația este  $m - x = 2$  cu soluția posibilă  $x = m - 2$ . Condiția  $x = m - 2 < m$

impune  $m \in \mathbb{Z}$ . Cazul  $x \in (m, +\infty)$ . Ecuația este  $x = m + 2$  care este soluție. Soluția ecuației date este  $S = \{m - 2, m + 2\}$ .

**R17. a)** Din prima ecuație se obține  $\{x\} = 0, 2$ , din a doua  $\{y\} = 0, 7$  și apoi  $\{x\} + \{y\} = 2$ . Soluția sistemului se scrie  $x = n + 0, 2$ ,  $y = 2, 8 - m$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . **b)** Din prima ecuație se obține  $\{x\} = 0, 1$ . Soluția  $y = 4, 2$  și  $x = 1, 1$ . **c)** Dacă  $\{x\} = 0$ , atunci din prima ecuație se obține  $x = 0$  și din a doua  $y = 0$ . Fie  $\{x\} = n \in \mathbb{Z}$ . Din a doua ecuație obținem  $y(1 - n\{y\}) = 0$ . Cum  $y \neq 0$ , avem  $1 = n\{y\}$ , deci  $\{y\} = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$ . Dacă  $y = p + \frac{1}{n}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ , din prima ecuație s-ar obține că  $n + \{x\} = pn + 1$ , deci  $\{x\} = 1 + n(1 - p) \in \mathbb{Z}$ , relație care poate avea loc doar dacă  $1 + n(1 - p) = 0$ , deci  $(p - 1)n = 1$ . Dar  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$  și relația nu poate avea loc. Așadar singura soluție este  $x = y = 0$ . **d)**  $x = 0$ ,  $y = 0$  este soluție. Fie  $x \neq 0$ . Din prima ecuație se obține  $\{y\} = 1 + \frac{y}{x}$ , deci  $\frac{y}{x} \in \mathbb{Z}$ . Notăm  $y = nx$  și avem  $\begin{cases} \{y\} = 1 + n = [nx] \\ [nx^2] = [x] + n + 1 \end{cases}$ . Pentru  $n = 1$  se obține  $x = y = 2$ . Dacă  $n \geq 2$  se obține că

$n + 1 \leq nx < n + 2$ , deci  $1 + \frac{1}{n} \leq x < 1 + \frac{2}{n}$  și  $[x] = 1$ . Astfel  $x^2 = \frac{n + 2}{n}$  și  $x = \sqrt{1 + \frac{2}{n}}$  care se constată că nu verifică. Pentru  $n \leq -1$  se arată că nu există soluție.

**R18. a)**  $(a, b)$ ; **b)**  $\emptyset$ ; **c)** Condițiile de existență pentru intervale impun  $x \in (-\infty, 1]$ . Dacă  $x \leq -3$  se obține  $\left[\frac{2 - x}{2}, \frac{4 - x}{2}\right]$ . Dacă  $x \in (-3, 1]$  se obține că

$\left[\frac{2 - x}{2}, \frac{5 - 3x}{4}\right]$ . **R19. a)** Pentru  $n = 1$ , intervalul este  $[1, 4]$  și cuprinde numerele  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Pentru  $n \geq 2$ , avem că  $2 - \frac{1}{n} < 2 < 3 < 3 + \frac{1}{n} < 4$ , deci cuprinde numerele 2 și 3. **b)** Pentru  $n = 1$ ,  $\{6, 7, 8, 9, 10\}$ , iar pentru  $n > 1$ ,  $\{7, 8, 9\}$ .

**R20.** Este necesar ca  $n \geq 2$ . Pentru  $n = 2k$ , avem că  $\frac{n}{2} + \frac{1}{n} = k + \frac{1}{2k} < k + 1 < \frac{n + 3}{2} - \frac{1}{n} < k + 2$ , deci intervalul conține doar pe  $k + 1 = \frac{n}{2} + 1$ . Pentru  $n = 2k + 1 \geq 3$  avem că  $\frac{n}{2} + \frac{1}{n} < k + 1 < \frac{n + 3}{2} - \frac{1}{n} < k + 2$  și intervalul conține numai pe  $k + 1 = \frac{n + 1}{2}$ . **R21. d)** și **f)** sunt propoziții adevărate, restul sunt false.

**R23.** a)  $\{0\}$ ; b)  $\{0, 2\}$ ; c)  $\{0, 1, 2, 5\}$ ; f) Se scrie că  $xy + 3x - 5y = 0 \Rightarrow (y + 3) \cdot (x - 5) = -15$ . **R24.**  $\{1, 2, 7, 8\}, \{3, 4, 5, 6\}$ . **R25.** Suma elementelor lui A este  $S = 2n(4n + 1)$ . Cele două submulțimi trebuie să aibă suma elementelor egală cu  $n(4n + 1)$ . Se poate lua  $B = \{1, 4n + 1, 2, 4n, 3, 4n - 1, \dots, n, 3n + 2\}$  și  $C = A \setminus B$ . **R26.**  $A_1 = \{0, 3, 6, \dots, 3n, \dots\}$ ,  $A_2 = \{1, 4, 7, \dots, 3n + 1, \dots\}$ ,  $A_3 = \mathbb{N} \setminus (A_1 \cup A_2)$ . **R28.** Inducție matematică. Pentru calculul sumelor se au în vedere egalitățile: a)  $k!k = (k+1)! - k!$ ; b)  $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$ ; c)  $\frac{1}{k! + (k+1)!} = \frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+2)!}$  pentru  $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ . **R33.**  $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$ , dacă a este pătrat perfect impar. Fie  $(2k - 1)$  cel mai mare număr natural din mulțime. Rezultă că  $2k - 1 \leq \sqrt{2n - 1}$ , de unde  $n \geq 2k^2 - 2k + 1$ . Se obține că  $\left[\frac{n}{2}\right] < k \leq \left[\frac{1 + \sqrt{2n - 1}}{2}\right]$ , deoarece  $2k - 1 \leq \sqrt{2k - 1} < 2k$ . Rezultă  $k = \left[\frac{1 + \sqrt{2n - 1}}{2}\right]$ , având în vedere că există un singur k cu proprietatea cerută. **R35.**  $6^8$ . **R36.** Fie  $a = \text{card}(A)$ ,  $b = \text{card}(B)$ . Se pune condiția  $a^b = b^a$ . Rezultă:  $a = 2, b = 4$  sau  $a = 4, b = 2$  sau  $a = b$  etc. **R37.** 144 moduri. Se observă că dacă numărul n se scrie în  $a_n$  moduri, există relația  $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ ,  $n \geq 2$ . **R41.** a)  $|a_n| \leq 2^x$ , mărginit, crescător. b) Dacă  $1 - x^2 > 0$ , șir crescător, dacă  $1 - x^2 < 0$ , șir descrescător, dacă  $1 - x^2 = 0$ , șir constant; c)  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ , șir crescător. Se observă că  $a_{n+1} \geq 2a_n$  și se obține că  $a_n \geq 2^{n-1}$ , deci este nemărginit. d)  $a_{2k} = 1$  și  $a_{2k-1} = 2k - 1$ . Șir nemonoton și nemărginit. **R42.** Fie n, n + m, n + 2m laturile. Se obține ecuația  $n^2 - 2mn - 3m^2 = 0$  cu soluția acceptabilă  $n = 3m$  și triunghiul are laturile 3m, 4m, 5m, unde  $m \in \mathbb{N}^*$ . **R48.** Pragurile au termeni generali  $a_n = 4n - 3$  și  $b_n = 11n - 7$ . Din egalitățile  $a_n = b_m$  se obține că  $4n = 11m - 10$  sau  $n = 2m - 2 + \frac{3m - 2}{4}$ . Scriem că  $3m - 2 = 4s$  și se obține  $m = s + \frac{s + 2}{3}$ . Este necesar ca  $s + 2 = 3k$  și vom obține că  $m = 4k - 2, n = 11k - 8$ . Termenii comuni formează șirul  $(a_{11k-8})$  sau  $(b_{4k-2})$  care este progresie aritmetică. **R51.**  $a_1 = 3, q = 4$  sau  $a_1 = 48, q = \frac{1}{4}$  și progresie este 3, 12, 48 sau 48, 12, 3 etc. **R56.** a) Notăm  $a = x^2 - yz, b = y^2 - xz$  și  $c = z^2 - xy$ . Se va obține succesiv:  $x^4yz - x^3y^3 + xy^4z - y^3z^3 + xyz^4 - z^3x^3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^3y(-b) + xz(y^4 - x^2z^2) + yz^3(-y^2 + xz) = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow abc = 0$  etc. b) După ridicarea la cub și reduceri se ajunge la a) etc. **R57.** Se ia  $n = 1, 2, \dots$  și se adună relațiile obținute. Rezultă că  $f(n) = 1 + 2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ . **R59.** a)  $|f(n)| = 1$ , deci f este mărginită; b) nemonotonă; c) Se arată că  $f(n + 4) = f(n)$ . **R60.** a)  $|f_n(x)| = \left\{\frac{x}{n}\right\} \in [0, 1)$ ; mărginită; b)  $f(x + 2n) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ . **R61.** a) mărginită,  $T = 2$ ; b) mărginită,  $T = 1$ ; c) mărginită,  $0 \leq f(x) \leq n, T = 1$ ; d) mărginită,  $T = 2$ ; e) mărginită,  $T = n$ . **R62.** a)  $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + nx^2}}$ ; c)  $f_n(x) = x + (4^n - 1)[x]$ ; d)  $(f \circ f)(x) = x$  etc.; e)  $(f \circ f)(x) = -1$  etc; f)  $(f \circ f)(x) = (-1)^n$  etc. **R64.** Se folosesc următoarele egalități: a)  $f\left(\frac{1-x}{1+2x}\right) = \frac{1-x^2}{1+2x^2}$ ; b)  $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1-x^3}{1+x^3}$ ; c)  $f\left(\frac{2-x}{1+3x}\right) = \frac{2-x^2}{1+3x^2}$ ; d)  $f\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$ . **R68.** a)  $a \in (-\infty, -1]$ ; b)  $a \leq 0$  și  $a + 2 \leq a^2 + 2$ . Se obține  $a \in (-\infty, 0]$ ; c) Se pun condițiile  $0 \leq 1 - a \leq 1 - 3a \leq 8$ . Rezultă că  $a \in \left[-\frac{7}{3}, 0\right]$ . **R75.** a)  $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2m+3}{2(m+1)}, y = \frac{8m+7}{4(m+1)}$ . Se arată că  $x - 2y + 7 = 0$ . b) A(-1, 2) este comun parabolilor. **R76.**  $\Delta_1 = a^2 - 4b$ . Dar  $-b > -a - 1$  și rezultă că  $\Delta_1 > (a+2)^2 \geq 0$ . Analog se arată că  $\Delta_2 = b^2 - 4a > (b+2)^2 \geq 0$ , deci axa Ox este secantă parabolilor. **R78.**  $a = b = 2, c = 1, d = 3$ . **R83.** a) Se substituie  $z = 1 - x - y$  și se obține ecuația  $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$  sau  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 0$  cu soluția  $x = y = 1$  și  $z = -1$ . b)  $x = \frac{1}{3}, y = 1, z = -\frac{1}{2}$ .

## ELEMENTE DE GEOMETRIE

### Capitolul I. VECTORI IN PLAN

#### 1. Segmente orientate. Relația de echipolență (pag. 162)

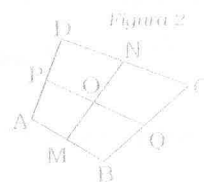
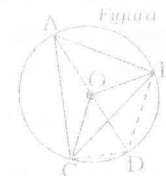
[1.] a) 4; b)  $\{AB, \{DC, \{AD, \{BC, \{BA, \{CD, \{DA, \{CB$  au câte două același sens. De sensuri opuse  $\{AB$  și  $\{BA$  sau  $\{AB$  și  $\{CD$  etc. [2.] a)  $\overline{AB}, \overline{FE}, \overline{AF}, \overline{BE}, \overline{CD}, \overline{BC}, \overline{ED}, \overline{AC}, \overline{FD}$  au respectiv aceeași direcție. b) Exemplu:  $\{AF, \{BE$  și  $\{CD$  au același sens, iar  $\{AF, \{DC$  au sensuri diferite etc. [3.] a)  $\{CB, \{DA,$  respectiv  $\{AE, \{b)$  Exemplu:  $\{AB, \{FC, \{ED$  au același sens, iar  $\{AF$  și  $\{DC$  au sensuri opuse. c)  $\{CB, \{EF, \{DO$ ; d)  $\{AO, \{BC, \{FE$ . [4.] a)  $\overline{EF}, \overline{FG}, \overline{MH}, \overline{HI}$ , respectiv  $\overline{AD}, \overline{JI}, \overline{LM}$ . [5.] a)  $\overline{DO}, \overline{DA}, \overline{CB}, \overline{EF}, \overline{QS}, \overline{PM}, \overline{RF}, \overline{ER}, \overline{CN}, \overline{NB}$ ; b)  $\overline{RQ}, \overline{SO}, \overline{OP}$ ; c)  $\overline{OQ}, \overline{SR}, \overline{NP}$ ; d)  $\overline{AO}, \overline{OD}, \overline{FE}$ ; e)  $\overline{FO}, \overline{FC}, \overline{MN}, \overline{RP}, \overline{AB}, \overline{ED}, \overline{AM}, \overline{MB}, \overline{EQ}, \overline{GD}$  și opusele acestora. [6.] A este mijlocul segmentului  $[DM]$ , B al lui  $[AN]$ , C al lui  $[BP]$  și D mijlocul pentru  $[CQ]$ . Se arată că  $\triangle AMN, \triangle BNP, \triangle CPQ$  și  $\triangle DQM$  sunt triunghiuri dreptunghice congruente.

#### 2. Operații cu vectori

##### 2.1. Suma și diferența vectorilor (pag. 163)

[1.] a)  $\overline{AC}$ ; b)  $\overline{AC_1}$ , unde  $C_1$  este simetricul lui C în raport cu B. c)  $\overline{AA_1}$ , unde  $A_1$  astfel încât  $ABCA_1$  este paralelogram. d)  $\overline{AB_1}$ , cu  $B_1$  simetricul lui B în raport cu C. *Observație.* Vectorii rezultați sunt reprezentanți ai vectorului sumă. Se pot face și alte construcții pentru obținerea unor reprezentanți ai sumei. [2.] Fie E, F, G astfel încât patruleterele AOED, AOBF, AOCB sunt paralelograme. Rezultă a)  $\overline{AO}$ ; b)  $\overline{AC}$ ; c)  $\overline{OE}$ ; d)  $\overline{OF}$ ; e)  $\overline{O}$ ; f)  $\overline{AB} + \overline{OC} = \overline{AB} + \overline{AO} = \overline{OG}$ ; g)  $\overline{AB} + \overline{BO} = \overline{AO}$ ; h)  $\overline{AB} + \overline{OA} + \overline{BO} = \overline{O}$ ; i)  $\overline{AD}$ . [3.] a)  $\overline{AD}$ ; b)  $\overline{AG}$ . G mijlocul segmentului  $[BC]$ . c)  $\overline{EB}$ ; d)  $\overline{DE} + \overline{DC} = \overline{DH}$ , cu CDEH paralelogram. e)  $\overline{BC} + \overline{CI} = \overline{BI}$ , unde I simetricul lui E față de C și BCII paralelogram. [4.] a)  $\overline{AC}$ ; b)  $\overline{CD}$ ; c)  $\overline{CG}$ , G mijlocul lui  $[EF]$ . d)  $\overline{BH}$ , cu BCHA paralelogram; e)  $\overline{CI}$ , I simetricul lui C față de E. [5.] a) Avem:  $\overline{AB} + \overline{DC} = (\overline{AC} + \overline{CB}) + \overline{DC} = \overline{AC} + (\overline{DC} + \overline{CB}) = \overline{AC} + \overline{DB}$ . b)  $\overline{AC} + \overline{BD} = (\overline{AD} + \overline{DC}) + \overline{BD} = \overline{AD} + (\overline{BD} + \overline{DC}) = \overline{AD} + \overline{BC}$ . [7.] a)  $\overline{AM}$ ; b)  $\overline{AB} + \overline{BM} = \overline{AM}$ ; c)  $\overline{AN}$ , N simetricul lui M față de B; d)  $\overline{AP}$ , P simetricul lui M față de C. e)  $\overline{AB}$ . [8.] Rezultanta este  $\overline{AC}$  și nu depinde de M. [9.] a) Nu. b) Da,  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \overline{O}$ ,  $\forall A, B, C \in \mathcal{R}$ . [11.] Fie ABCD paralelogram.

Avem  $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AD}$ . Se obține: a)  $4\sqrt{2}$ ; b)  $4\sqrt{3}$ ; c) 4. [12.] Relația are loc în oricare patruleter. [14.] a)  $\overline{OM} = \overline{OC}$ , deci O este simetricul lui C față de M. [17.] Paralelogram. [18.] a) a; b) b; c) a+b; d) a-b; e) b-a; f) -a-b. [19.]  $2MA = 2MO + MN$ . [20.] Punctele A, B, C sunt pe un cerc cu centrul în O. Fie D punctul diametrului opus lui A. Din relația  $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{O}$  rezultă că  $\overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OA} = \overline{OD}$ , deci patruleterul OBDC este romb, deci  $\overline{OB} \perp \overline{BC}$ . Analog rezultă că  $\overline{OB} \perp \overline{AC}$ , deci O este și ortocentrul triunghiului ABC. Se obține că ABC este echilateral.

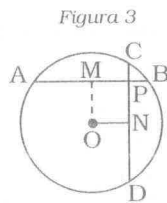


[21.] Punctele A, B, C, D sunt pe un cerc cu centrul O. Fie E, F astfel încât  $\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OE}$  și  $\overline{OC} + \overline{OD} = \overline{OF}$ . Rezultă că  $\overline{OE} + \overline{OF} = \overline{O}$ , deci O este mijlocul segmentului  $[EF]$ . Dacă M, N sunt mijloacele segmentelor  $[AB]$  și  $[CD]$  se obține că  $\overline{OM} = \overline{ON}$ , deci O, M, N sunt coliniare și O este mijlocul lui  $[MN]$ . Cum O este centrul cercului circumscris rezultă că  $\overline{ON} \perp \overline{DC}$ ,  $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ , deci  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ . Analog rezultă că  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ , deci ABCD este dreptunghi. [22.] OADB este paralelogram. Punctul C este simetricul lui D în raport cu O. [25.] Se duc prin A paralele la cele două drepte. Punctele de intersecție sunt cele cautate. [27.] Se obține  $\overline{EP} = \overline{O} = \overline{AF}$ . [29.] Avem:  $\overline{OA} = \overline{OM} + \overline{MA}$  și  $\overline{OB} = \overline{OM} + \overline{MB}$ . [30.] Fie  $\{O\} = \overline{AC} \cap \overline{BD}$ . Din problema 35 rezultă că  $\overline{MA} + \overline{MC} = 2\overline{MO}$  și  $\overline{MB} + \overline{MD} = 2\overline{MO}$ . [31.] Avem (problema 35):  $2\overline{OA_1} = \overline{OB} + \overline{OC}$ ,  $2\overline{OB_1} = \overline{OA} + \overline{OC}$ ,  $2\overline{OC_1} = \overline{OA} + \overline{OB}$ . Se adună aceste relații. [32.] Fie P, Q mijloacele segmentelor  $[AC]$  și  $[BD]$ . Atunci  $\overline{MA} + \overline{MC} = 2\overline{MP}$  și  $\overline{MB} + \overline{MD} = 2\overline{MQ}$ . Se obține  $\overline{MP} = \overline{MQ}$  și  $P = Q$ . [33.] a)  $\overline{O}$ ; b)  $\overline{O}$ . [34.] Cu regula poligonului se obține  $\overline{IJ} = \overline{IA} + \overline{AJ}$  și  $\overline{BC} = \overline{BI} + \overline{IJ} + \overline{JC} = \overline{IA} + \overline{IJ} + \overline{AJ} = 2\overline{IJ}$ . [35.]  $\triangle BEI = \triangle BCI$  rezultă că  $\overline{BI} = \overline{DI}$  și  $\overline{BI} = \overline{JI}$ . Deoarece  $\overline{AE} = \overline{FC}$ , patruleterul AECF este paralelogram. Rezultă că  $\overline{AJ} = 2\overline{EI}$  (problema 40), deci  $\overline{CI} = 2\overline{EI}$ . Din problema 40 rezultă că  $\overline{BC} = 2\overline{EO}$ . Dar  $\overline{BC} = \overline{BI} + \overline{IC}$  și  $\overline{EO} = \overline{EI} + \overline{IO}$ , deci obținem  $\overline{BI} + \overline{IC} = 2\overline{EI} + 2\overline{IO}$  și  $\overline{BI} = 2\overline{IO}$ . Analog se arată că  $\overline{DI} = 2\overline{IO}$ . Avem, de asemenea, că  $\overline{JD} = \overline{BI} = \overline{IJ}$ . [36.] Cu regula poligonului se obține  $\overline{MN} = \overline{ME} + \overline{ED} + \overline{DN}$  și  $\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AC} + \overline{CN}$ , deci  $2\overline{MN} = \overline{AC} + \overline{BD}$ . b) Analog:  $\overline{MN} = \overline{MB} + \overline{BC} + \overline{CN}$  și  $\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AD} + \overline{DN}$ . Prin adunare se obține relația cerută.

[37.]  $\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OC}$ . [38.]  $\overline{EG} = \overline{FG} = \overline{EG} + \overline{GF} = \overline{EF} = \overline{BC}$ .

**39. a)** Fie E, F mijloacele laturilor [AB], [CD]. Din problema 40 se obține că  $\overline{PR} = 2\overline{EF} = \overline{BC} + \overline{AD}$  (problema 42). **40.** OACB este romb. **41.** Fie  $\{O\} = AC \cap BD$ . Cum  $\overline{OA} + \overline{OC} = \vec{0}$  și  $\overline{OB} + \overline{OD} = \vec{0}$  punctul O verifică. Dacă M este alt punct din plan cu proprietatea dată, avem:  $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = \vec{0} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}$ , de unde rezultă că  $4\overline{MO} = \vec{0}$ , deci  $O = M$  (se are în vedere că  $\overline{MA} = \overline{MO} + \overline{OA}$  etc.). **42.** Nu. **43. b)** Se scrie  $\overline{OA} = \overline{OM} + \overline{MA}$  etc. și se aplică a). **45.** Coliniari cu același sens. **46.** M este centrul paralelogramului. Se aplică problema 49 b). **47.** Avem  $\overline{CL} = \overline{CN} + \overline{NL} = \overline{NB} + \overline{MN} = \overline{MB}$ , deci MBLC este paralelogram. Analog ALDP este paralelogram. Dar  $\overline{CS} = \overline{MB} = \overline{PC}$  și se obține că  $\overline{PS} = 2\overline{PC} = 2\overline{MB} = \overline{LM}$  și patrulaterul LMSP este paralelogram cu diagonalele MP și SL, concurente în centrul dreptunghiului.

**48.** Fie M, N mijloacele coardelor [AB] și [CD]. Rezultă că  $\overline{PA} = \overline{PO} + \overline{OA}$ ,  $\overline{PB} = \overline{PO} + \overline{OB}$ ,  $\overline{PC} = \overline{PO} + \overline{OC}$  și  $\overline{PD} = \overline{PO} + \overline{OD}$ . Prin adunare se obține  $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD} = 4\overline{PO} + \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}$ . Dar  $\overline{OA} + \overline{OB} = 2\overline{OM}$  și  $\overline{OC} + \overline{OD} = 2\overline{ON}$  și astfel  $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = 2(\overline{OM} + \overline{ON}) = 2\overline{OP}$  și se obține egalitatea cerută.



**49.** Fie  $\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB}$ . Rezultă că (OM este bisectoarea unghiului BOA). Rezultă că unghiurile  $\widehat{AOM}, \widehat{BOM}$  sunt ascuțite și  $|\overline{OM}| > 1$ . Dacă luăm  $N \in (OM)$ , cu  $ON = 1$ , rezultă că rezultanta  $\overline{OC} + \overline{ON}$  este pe bisectoarea unghiului  $\widehat{CON}$  și  $|\overline{OC} + \overline{ON}| > 1$ . Așadar  $|\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}| \geq |\overline{OM} + \overline{OC}| \geq |\overline{ON} + \overline{OC}| > 1$ .

### 2.2. Înmulțirea cu scalari a vectorilor (pag. 170)

**51.**  $\overline{AP} = \vec{a}$ ;  $\overline{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ ,  $\overline{OQ} = 4\vec{b}$ ,  $\overline{PO} = -2\vec{a}$ ,  $\overline{PQ} = \overline{PO} + \overline{OQ} = -2\vec{a} + 4\vec{b}$ ,  $\overline{PN} = \frac{1}{2}\overline{PQ} = -\vec{a} + 2\vec{b}$ ,  $\overline{ON} = \frac{1}{2}(\overline{OP} + \overline{OQ}) = \vec{a} + 2\vec{b}$ ,  $\overline{AN} = \overline{ON} - \overline{OA} = 2\vec{b}$ .

**52.** Deoarece  $\overline{DC} = 2\overline{AR}$  rezultă că  $DC \parallel AB$ . Avem  $\overline{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ ,  $\overline{DB} = \overline{DC} + \overline{CB} = -2\vec{a} - \vec{b}$ ,  $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \vec{b} + 3\vec{a}$ ,  $\overline{CA} + \overline{DB} = (\vec{a} + \vec{b}) + (-2\vec{a} - \vec{b}) = -\vec{a}$ .

**53.**  $\overline{AB} = -\frac{4}{3}\vec{c}$ ,  $\overline{CB} = -\frac{7}{3}\vec{a}$ ,  $\overline{AC} = -2\vec{b}$ ,  $\overline{AM} = \vec{a} - \frac{4}{3}\vec{c}$ ,  $\overline{BN} = \frac{7}{3}\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\overline{CP} = 2\vec{b} - \frac{\vec{c}}{3}$ .

**54.** Fie O centrul hexagonului. Rezultă  $\overline{AD} = 2\overline{AO} = 2(\vec{a} + \vec{b})$ ,  $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = -\vec{a} + \overline{AO} = \vec{a} + \vec{a} + \vec{b} = 2\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\overline{AE} = \overline{AF} + \overline{FE} = \vec{b} + \overline{AO} = \vec{a} + 2\vec{b}$ .

**55.** Avem  $\overline{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ ,  $\overline{FO} = \overline{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ ,  $\overline{FC} = 2\overline{FO}$ ,  $\overline{BC} = \overline{AO} = \overline{AB} + \overline{AF} = \vec{b} - \vec{a} - \vec{a} = \vec{b} - 2\vec{a}$ ,  $\overline{FD} = \overline{FE} + \overline{ED} = \overline{BC} + \overline{AB}$ . **62. a)**  $x = -1$ ; b)  $x = -2$ ; c)  $x = -\frac{1}{2}$ .

**68.**  $\overline{PQ} = \frac{1}{3}(\overline{AC} - 2\overline{AB})$ ,  $\overline{PR} = \frac{1}{3}(2\overline{AB} - \overline{AC})$ ,  $\overline{PQ} = -\overline{PR}$ , deci P este mijlocul lui [QR]. **69.**  $a = b$ . **70.**  $\frac{3}{2}\overline{AC} - \frac{1}{3}\overline{AB}$ . **74.**  $\overline{BA} = \overline{CD} = \overline{CA} + \overline{AD} = -6\overline{AL} + 5\overline{AK}$ , iar  $\overline{BL} = \overline{BA} + \overline{AL} = 5\overline{AK} - 5\overline{AL} = 5(\overline{AK} + \overline{LA}) = 5\overline{LK}$ , deci B, L, K sunt coliniare și  $BL = 5LK$ . **75.** Se obține  $x\overline{AB} = \overline{AM} - \overline{AC} = \overline{CM}$ . Avem  $\overline{AN} = \overline{AB} + \overline{BN} = \overline{AB} + \frac{1}{x+1}\overline{BC}$  și  $\overline{NM} = \overline{NC} + \overline{CM} = \frac{x}{x+1}\overline{BC} + x\overline{AB} = x\overline{AN}$ .

**79.** Fie  $\overline{AB} = k\overline{BC}$ . Rezultă că  $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ ,  $\overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB}$  și  $\overline{OB} - \overline{OA} = k(\overline{OC} - \overline{OB})$  sau  $\overline{OA} + k\overline{OC} - (1+k)\overline{OB} = \vec{0}$ . Deci dacă A, B, C sunt coliniare se poate lua  $a = 1$ ,  $b = k$ ,  $c = -1 - k$ . Reciproc, fie  $a\overline{OA} + b\overline{OB} + c\overline{OC} = \vec{0}$  și  $a + b + c = 0$ . Rezultă că  $a\overline{OA} + b\overline{OB} + (-a - b)\overline{OC} = \vec{0}$  sau  $a(\overline{OA} - \overline{OC}) + b(\overline{OB} - \overline{OC}) = \vec{0}$ , deci  $a\overline{CA} + b\overline{CB} = \vec{0}$  și vectorii  $\overline{CA}, \overline{CB}$  sunt coliniari.

**80. a)** Deoarece  $\overline{GA} = -\frac{m}{n}\overline{GB}$ , pentru  $n \neq 0$ , punctul G există, el împărțind segmentul [AB] în raportul  $-\frac{m}{n}$ . Dacă mai există M cu  $m\overline{MA} + n\overline{MB} = \vec{0}$ , atunci  $m\overline{MA} + n\overline{MB} = m\overline{GA} + n\overline{GB}$ , deci  $m\overline{MG} + n\overline{MG} = \vec{0}$  sau  $\overline{MG} = \vec{0}$  sau  $M = G$ . **c)** Folosim că  $\overline{GA} = \overline{GM} + \overline{MA}$  și  $\overline{GB} = \overline{GM} + \overline{MB}$  în relația de la a).

**81.** Fie M, N mijloacele laturilor [AB] și [AC]. Din problema 40 rezultă că  $\overline{BC} = 2\overline{MN}$ , deci  $BC \parallel MN$  și  $BC = 2MN$ . **82.** Fie ABCD trapez  $AB \parallel CD$  și M, N mijloacele laturilor [AD] și [BC]. Cu regula poligonului rezultă că  $\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AB} + \overline{BN}$  și  $\overline{MN} = \overline{MD} + \overline{DC} + \overline{CN}$ . Prin adunare se obține relația  $2\overline{MN} = \overline{AB} + \overline{DC}$ . Dar  $\overline{AB}$  și  $\overline{DC}$  sunt coliniari și există  $a \in \mathbb{R}$  cu  $\overline{AB} = a\overline{DC}$ , deci  $2\overline{MN} = (1+a)\overline{DC}$ . Rezultă că  $MN \parallel DC$ . **83.** Fie ABCD patrulater, M, N, P, Q mijloacele laturilor [AB], [BC], [CD], [DA]. Cu problema 87 se obține că  $2\overline{MN} = \overline{AC} = 2\overline{PQ}$  și  $2\overline{MQ} = \overline{BD} = 2\overline{NP}$ , deci  $MN \parallel PQ$  și  $MQ \parallel NP$ .

**84.** Avem  $\overline{BE} + \overline{EC} = \overline{BC}$  și  $\overline{CD} + \overline{DB} = \overline{CB}$ . Prin adunare rezultă  $\overline{BE} + \overline{CD} = \overline{CE} + \overline{BD} = \frac{\overline{CD}}{4} + \frac{\overline{BA}}{4}$ , (1). De asemenea,  $\overline{AD}_1 = \overline{AD} + \overline{DD}_1 = \frac{3}{4}\overline{AB} + 3\overline{CD}$  și  $\overline{AE}_1 = \overline{AE} +$

$$+ \overline{EE_1} = \frac{3}{4} \overline{AC} + 3\overline{BE}. \text{ Prin adunare: } \overline{AD_1} + \overline{AE_1} = \frac{3}{4} \overline{AB} + \frac{3}{4} \overline{AC} + 3\overline{CD} + 3\overline{BE} = \frac{3}{4} \cdot$$

$$\cdot (\overline{AB} + \overline{AC}) - \frac{3}{4} (\overline{AB} + \overline{AC}) = \vec{0}. \text{ Deci } \overline{AD_1} = \overline{E_1A} \text{ și } A, D_1, E_1 \text{ coliniare.}$$

**85.** Fie  $AB = a, BC = b$ . Rezultă  $\overline{CM} = \overline{CB} + \overline{BM} = \overline{DA} + \frac{a}{b} \overline{AB} = \frac{1}{b} (a\overline{AB} - b\overline{AD})$ ,

$$\overline{CE} = \overline{CD} + \overline{DE} = \overline{BA} + \frac{b}{a} \overline{AD} = -\frac{1}{a} (a\overline{AB} - b\overline{AD}), \text{ deci } a\overline{CE} + b\overline{CM} = \vec{0} \text{ și } C, M, E$$

coliniare. **86.** Avem  $2\overline{MN} = \overline{AB} + \overline{A'B'} = \overline{DC} + \overline{D'C'} = 2\overline{QP}$  și  $2\overline{MQ} = \overline{AD} + \overline{A'D'} =$

$$= \overline{BC} + \overline{B'C'} = 2\overline{NP}$$
. Așadar  $MN \parallel PQ$  și  $MQ \parallel NP$ . **87.** Fie  $2\overline{MN} = \overline{AD} + \overline{BC}$ . Dar

$$2\overline{MN} = \overline{AD} + \overline{BC} \text{ și rezultă } |\overline{AD} + \overline{BC}| = AB + BC = |\overline{AD}| + |\overline{BC}|, \text{ deci vectorii } \overline{AD} \text{ și}$$

$$\overline{BC} \text{ sunt coliniari, deci } AD \parallel BC.$$

**88.** Fie  $k = \frac{AD}{DB} = \frac{EC}{EA}$ . Rezultă că  $\overline{AD} = \frac{k}{k+1} \overline{AB}$  și  $\overline{AE} = \frac{1}{k+1} \overline{AC}$ . Dacă O

este mijlocul segmentului [DE] obținem că  $2\overline{AO} = \overline{AD} + \overline{AE} = \frac{k}{k+1} \overline{AB} + \frac{1}{k+1} \overline{AC} =$

$$= \frac{2k}{k+1} \overline{AM} + \frac{2}{k+1} \overline{AN}, \text{ de unde } \overline{AO} = \frac{k}{k+1} \overline{AM} + \frac{1}{k+1} \overline{AN} \text{ și cum } \frac{k}{k+1} + \frac{1}{k+1} = 1,$$

punctele O, M, N sunt coliniare.

**89.** Fie  $\{O\} = AC \cap BD$ . Dreptele linii mijlocii se intersectează în centrul paralelogramului format cu mijloacele M, N, P, Q ale laturilor [AB], [BC], [CD], [DA].

$$\text{Rezultă că } \vec{0} = \overline{OM} + \overline{ON} + \overline{OP} + \overline{OQ} = \frac{1}{2} (\overline{OA} + \overline{OB}) + \frac{1}{2} (\overline{OB} + \overline{OC}) + \frac{1}{2} (\overline{OC} + \overline{OD}) +$$

$$+ \frac{1}{2} (\overline{OD} + \overline{OA}) = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}. \text{ Notăm } R \in (OC \text{ astfel încât } \overline{OA} = -\overline{OR} \text{ și}$$

$$S \in (OD \text{ cu } \overline{OB} = -\overline{OS}. \text{ Rezultă că } \vec{0} = -\overline{OR} - \overline{OS} + \overline{OC} + \overline{OD} = \overline{RO} + \overline{OC} + \overline{SO} + \overline{OD} =$$

$$= \overline{RC} + \overline{SD}, \text{ deci } \overline{SD} \text{ și } \overline{RC} \text{ sunt vectori coliniari (opusi), ceea ce se poate}$$

numai dacă  $S = D$  și  $R = C$ , deci ABCD este paralelogram.

**90.** Se cunoaște că  $\frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD} = \frac{AB}{DC} = \frac{a}{b}$ , unde  $a = AB, b = CD$ . Rezultă că

$$\overline{AO} = \frac{a}{a+b} \overline{AC}, \overline{BO} = \frac{a}{a+b} \overline{BD} \text{ și fie } \overline{AE} = k\overline{ED}. \text{ Din asemănarea triunghiurilor}$$

$$AOE \text{ și } ACD \text{ se obține că } \frac{AE}{ED} = \frac{a}{b} \text{ și analog } \frac{BF}{FC} = \frac{a}{b}.$$

Dar  $\overline{EO} = \overline{AO} - \overline{AE} = \frac{a}{a+b} \overline{AC} - \frac{a}{a+b} \overline{AD} = \frac{a}{a+b} \overline{DC}$ . În mod analog se obține

relația  $\overline{FO} = \overline{BO} - \overline{BF} = -\frac{a}{a+b} \overline{DC}$ , deci  $\overline{OE} = \overline{OF}$  și  $OE = OF$ . **91.** Vom arăta că

vectorii  $\overline{GH}$  și  $\overline{EF}$  sunt coliniari. Fie  $a = \frac{AE}{AB}$ . Rezultă că  $\overline{AG} = (1-a)\overline{AD}$  și

$$\overline{AE} = a\overline{AB}, \overline{AG} = (1-a)\overline{AD} \text{ și se obține că:}$$

$$\overline{GD} = \overline{AD} - \overline{AG} = \overline{AD} - (1-a)\overline{AD} = a\overline{AD}, \text{ deci } \overline{GH} = \overline{GD} + \overline{DH} = a\overline{AD} + \overline{AE} =$$

$$= a(\overline{AD} + \overline{AB}) = a\overline{AC}. \text{ Analog } \overline{BF} = \overline{EB} + \overline{BF} = (1-a)\overline{AB} + (1-a)\overline{AD} = (1-a)\overline{AC}.$$

Așadar  $\overline{GH}, \overline{EF}$  și  $\overline{AC}$  sunt respectiv coliniari și astfel  $GH \parallel AC, EF \parallel AC$ .

**3. Descompunerea unui vector după doi vectori necoliniari (pag. 176)**

**1.**  $\overline{AM} = \overline{AD} + \overline{AE}$ . D, E mijloacele laturilor [AB] și [AC].

**2.** Se știe că  $\overline{AM} + \overline{BN} + \overline{CP} = \vec{0}$ , deci  $\overline{AM} = \overline{NB} + \overline{PC} = \overline{AQ} + \overline{AR}$ , unde Q, R sunt astfel încât ANBQ, APCR sunt paralelograme.

**3.** D este piciorul bisectoarei interioare sau exterioare. **4.** (AD este bisectoarea interioară a unghiului BAC. **5.** Se au în vedere relațiile

$$\overline{AB} = \overline{AC} - \overline{AD}, \overline{BC} = \overline{AD}, \overline{CD} = -\overline{AB} = \overline{AD} - \overline{AC}, \overline{DA} = -\overline{AD}, \overline{6.} \overline{AD} = \overline{AM} + \overline{AN}$$

unde  $M \in (AB), N \in (AC)$  și  $\frac{AM}{MB} = \frac{n}{m}, \frac{AN}{NC} = \frac{m}{n}$ .

**4. Reper cartezian**

**4.1. Coordonatele unui vector (pag. 177)**

**1. a)**  $\overline{AB}(4, -2); \overline{AC}(-6, 0); \overline{AE}(-2, 4); \text{ b)}$   $(-2, -2), (-12, 6)$ , respectiv  $(8, 2)$ .

**2. a)**  $\overline{AB}(-2, 2), \overline{BC}(-6, 0), \overline{AC}(-8, 2); \text{ b)}$  Fie  $M(x, y)$ . Rezultă că  $\overline{AM} + \overline{BM} +$

$$+ \overline{CM}$$
 are coordonatele  $(3x - 2, 3y - 16)$ . Se obține  $x = \frac{10}{3}, y = 8$ .

**3. a)**  $O(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \text{ b)}$  Se obține  $M(1, \frac{7}{5}), N(\frac{11}{3}, 3), \text{ c)}$   $G(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ .

**7.**  $\vec{a}(0, 1), \vec{b}(-6, 11), (\vec{a} + \vec{b})(-6, 12), (\vec{a} - \vec{b})(6, -10)$ . **116.**  $\overline{BC}(2, -8)$ .

**10. a)** Se scrie  $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$ . Rezultă egalitatea de vectori  $5\vec{i} - \vec{j} = (x - y)\vec{i} +$

$$+ (x + 2y)\vec{j}$$
 și  $x = 3, y = -2$ . **b)**  $(\frac{2}{3}, -\frac{7}{3}); \text{ c)}$   $(0, 2); \text{ d)}$   $(-\frac{11}{3}, \frac{2}{3})$ .

**12.**  $A(2, 3), B(0, 4), C(-3, 1), D(-4, -3), E(-\frac{3}{2}, 0), F(2, \sqrt{3})$ . **123. a)** Se

scrie  $D(x, y)$  și  $\overline{AD} = \overline{BC}$ . Rezultă  $(x - 2, y - 3) = (5, -2)$  și  $x = 7, y = 1$ . **b)** Paralelogramele sunt ABCD, ACBE, ABFC. Se obține  $D(7, 1), E(3, -5), F(-3, -3)$ .

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

19. Nu. 20. a) Punem condiția  $\overline{AB} = \alpha \overline{CD}$  și se obține  $-5\vec{i} - 4\vec{j} = \alpha(x-4)\vec{i} + \alpha\vec{j}$ , cu soluția  $\alpha = -4$ ,  $x = \frac{21}{4}$ . b) Fie  $E(x, y)$  și  $\overline{AC} = \alpha \overline{BE}$ . Rezultă relațiile

$2\vec{i} - 4\vec{j} = \alpha(x+3)\vec{i} + \alpha(y-1)\vec{j}$  și  $\frac{y+1}{2} = 0$ . Rezultă  $y = -1$ ,  $\alpha = 2$ ,  $x = -1$ ,  $E(-1, -1)$ .

23. a)  $\overline{AM} = 6\vec{a} - \vec{b}$ ; b)  $\overline{AM} = -2\vec{a} - 4\vec{b}$ ,  $\overline{BM} = -3\vec{a} - 4\vec{b}$ . 25.  $C(5, 3)$ .

26. a) Fie  $C$  și  $D$  astfel încât  $\overline{OC} = 2\overline{OA}$  și  $\overline{OD} = y\overline{OB}$ . Rezultă că  $\overline{OM} = \overline{OC} + \overline{OD}$ , deci  $ODMN$  este paralelogram,  $\overline{CM} = \overline{OD}$  și  $CM \parallel OB$ . Locul geometric este o dreaptă paralelă cu  $OB$  dusă prin  $C$ .

b) Din relația  $\overline{OM} = x\overline{OA} - \overline{OB}$ , dacă  $B_1$  este simetricul lui  $B$  față de  $O$ , rezultă că  $\overline{B_1M} = x\overline{OA}$ , deci vectorii  $\overline{B_1M}$  și  $\overline{OA}$  sunt coliniari și  $B_1M \parallel OA$ . Locul geometric este paralela prin  $B_1$  la  $OA$ . c) Se obține că  $\overline{OM} = x(\overline{OA} + 2\overline{OB}) + \overline{OB}$  sau  $\overline{BM} = x(\overline{OA} + 2\overline{OB}) = x\overline{OC}$ , unde  $\overline{OC} = \overline{OA} + 2\overline{OB}$ . Așadar vectorii  $\overline{BM}$  și

$\overline{OC}$  sunt coliniari și  $BM \parallel OC$ . Punctul  $M$  aparține paralelei prin  $B$  la  $OC$ .

27. Se folosesc relațiile  $2\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB}$ ,  $2\overline{ON} = \overline{OB} + \overline{OC}$ ,  $2\overline{OP} = \overline{OC} + \overline{OA}$ . Prin adunare rezultă că  $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OM} + \overline{ON} + \overline{OP}$  și apoi  $\overline{OA} = \overline{OM} - \overline{ON} + \overline{OP}$ ,  $\overline{OB} = \overline{OM} + \overline{ON} - \overline{OP}$ ,  $\overline{OC} = \overline{ON} + \overline{OP} - \overline{OM}$ . Se are în vedere apoi că  $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = 2\overline{ON} - 2\overline{OP} = -2\vec{i} - 8\vec{j}$  etc.

29.  $\overline{AB} + \overline{AF} = \overline{AO}$ ,  $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{AO}$ ,  $\overline{AE} = \overline{AF} + \overline{FE} = \overline{AF} + \overline{AO}$ ,  $\overline{AD} = 2\overline{AO}$ . Se obține  $S = \overline{AO} + \overline{AB} + \overline{AO} + \overline{AF} + \overline{AO} + 2\overline{AO} = 5\overline{AO} + \overline{AB} + \overline{AF} = 6\overline{AO}$ .

4.2. Distanța dintre două puncte (pag. 181)

30. a)  $AB = BC = \sqrt{10}$ ; b)  $AB = \sqrt{1160}$ ,  $BC = \sqrt{1044}$ ,  $AC = \sqrt{116}$  și  $AB^2 = AC^2 + BC^2$ ; c)  $AB = AC = BC = 1$ . 32. a)  $AB = AC = 10$ ; b)  $AB = BC = \sqrt{40}$ ;

c)  $AB = \sqrt{1160}$ ,  $AC = \sqrt{1044}$ ,  $BC = \sqrt{116}$ ; d)  $AB = BC = AC = 2$ .

35. Fie  $C(x, 0)$ . Se obține  $AB^2 = 5$ ,  $AC^2 = (x-4)^2 + 9$ ,  $BC^2 = (x-3)^2 + 25$ . Se observă că sunt posibile doar situațiile  $AB^2 + AC^2 = BC^2$  sau  $AB^2 + BC^2 = AC^2$ . Se obține  $x = -2$ ,  $x = -7$ . Dacă  $C(0, y)$  se obține  $AB^2 = 5$ ,  $AC^2 = 16 + (y-3)^2$ ,  $BC^2 = 9 + (y-5)^2$ . Sunt posibile egalitățile  $AB^2 + AC^2 = BC^2$  sau  $AB^2 + BC^2 = AC^2$ . Se obține  $y = 1$  și  $y = \frac{7}{2}$ .

36. Dacă  $M$  este egal depărtat de axe rezultă că are coordonatele  $M(x, x)$  sau  $M(x, -x)$ . Avem relația  $AM = |x|$ , de unde se obține că  $(x-4)^2 + (x-10)^2 = x^2$  sau  $(x-4)^2 + (x+10)^2 = x^2$  cu soluțiile  $x = 14 \pm \sqrt{80}$ .

37. Se ia  $C(x, y)$  și se folosesc egalitățile  $AC^2 = AB^2 = 4$ ,  $BC^2 = AB^2 = 4$ . Se obține un sistem de ecuații cu soluția  $x = 2$ ,  $y = 2 \pm \sqrt{3}$ .

38.  $C\left(-\frac{6}{5}, 0\right)$  sau  $C(0, 6)$ . 39.  $C(8, 9)$ ,  $D(7, 5)$ .

40. Fie  $C(x, y)$ ,  $D(a, b)$ . Segmentele  $[AC]$ ,  $[BD]$  au același mijloc. Rezultă că  $x+2 = a-2$  și  $y+3 = b+7$ , deci avem  $C(x, y)$  și  $D(x+4, y-4)$ . Se pun condițiile  $BC = AB$  și  $AB^2 + BC^2 = AC^2$  și rezultă  $x = 2$ ,  $y = 11$  și  $x = -6$ ,  $y = 3$ .

42. Fie  $B(x, 0)$ . Din teorema lui Pitagora se obține că  $OB^2 = OA^2 + AB^2 = 25$ , deci  $OB = 5$  și  $x \in \{-5, 5\}$ . Se ia  $A(a, b)$  și din relațiile  $OA = 3$ ,  $AB = 4$  se

obține sistemul de ecuații  $\begin{cases} a^2 + b^2 = 9 \\ (a-5)^2 + b^2 = 16 \end{cases}$  sau  $\begin{cases} a^2 + b^2 = 9 \\ (a+5)^2 + b^2 = 16 \end{cases}$ , cu soluțiile  $a = \frac{9}{5}$ ,  $b \in \left\{\pm \frac{12}{5}\right\}$  și  $a = -\frac{9}{5}$ ,  $b \in \left\{\pm \frac{12}{5}\right\}$ .

44. Se iau punctele  $A(a, 0)$ ,  $B(b, 0)$  și  $C(0, c)$  și se exprimă distanțele cerute. 47.  $b = 1$ ,  $a = 4, 5$ . 48. Centrul de greutate al triunghiului este  $G(0, m)$ . Rezultă  $AG^2 = 2m^2$ ,  $BG^2 = 2m^2$ ,  $AB^2 = 4m^2 = AG^2 + BG^2$ , deci  $AG \perp BG$ .

49. Din condițiile  $AB = BC$  și  $AB^2 + BC^2 = AC^2$  se obțin relațiile:

$\begin{cases} a^2 - 4a + 2b - 1 = 0 \\ b^2 - 4b + 4a - 8 = 0 \end{cases}$ . Notăm  $a - 3 = x$  și prima ecuație se scrie  $2b + x^2 + 2x -$

$-4 = 0$ . Se substituie  $b$  în a doua ecuație și se rezolvă ecuația:

$x(x^3 + 4x^2 + 4x + 16) = 0$  sau  $x(x+4)(x^2 + 4) = 0$ , cu soluțiile  $x = 0$ ,  $x = -4$  și  $a = 3$ ,  $a = -1$ . Pentru  $a = 3$  se găsește  $b = 2$ , iar pentru  $a = -1$ ,  $b = -2$ . Dacă  $AC$  este latură și  $BC$  diagonală, avem condițiile  $AB = AC$  și  $AB^2 + AC^2 = BC^2$  etc. 52.  $AB = \sqrt{17}$ ,  $BC = \sqrt{41}$ ,  $AC = 4$ , deci  $AC < AB < BC$  și  $B < C < A$ .

Capitolul II. COLINIARITATE, CONCURENȚĂ, PARALELISM

1. Vectorul de poziție al unui punct (pag. 185)

1. a)  $\overline{OA} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ ,  $\overline{OB} = 6\vec{i} + \vec{j}$ ,  $\overline{OC} = -\vec{i} - 3\vec{j}$ ; b)  $\overline{OM} = \frac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2} = 4\vec{i} + \frac{5}{2}\vec{j}$ ;

$\overline{ON} = \frac{\overline{OB} + \overline{OC}}{2} = \frac{5}{2}\vec{i} - \vec{j}$ ,  $\overline{OP} = \frac{\overline{OC} + \overline{OA}}{2} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$ .

3. Notăm  $\{E\} = AC \cap BD$ . Se obține  $2\overline{OE} = \overline{OA} + \overline{OC}$  și  $2\overline{OE} = \overline{OB} + \overline{OD}$ .

4. Avem  $2\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB}$ ,  $2\overline{ON} = 2\overline{OB} + \overline{OC}$ ,  $2\overline{OP} = \overline{OC} + \overline{OD}$ ,  $2\overline{OQ} = \overline{OD} + \overline{OA}$ . Prin adunare se obține relația cerută.

5. Avem  $2\vec{r}_G = 2\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} = \vec{r}_A + \vec{r}_B$ . Analog:  $2\vec{r}_G = \vec{r}_B + \vec{r}_C$ ,  $2\vec{r}_G = \vec{r}_C + \vec{r}_A$  și se adună aceste egalități.

6. Se adună egalitățile  $2\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB}$ ,  $2\vec{ON} = \vec{OB} + \vec{OC}$ ,  $2\vec{OP} = \vec{OC} + \vec{OD}$  și  $2\vec{OQ} = \vec{OD} + \vec{OA}$ . Într. [7] se aplică problema 4 pentru perechile de triunghiuri  $ABC$ ,  $MNI$  și  $MNP$ ,  $DEF$ . [8] Folosim vectorul de poziție al punctului care împarte un segment într-un raport dat. Rezultă:  $\vec{OM} = \frac{2\vec{OA} + \vec{OB}}{3}$ ,  $\vec{ON} = \frac{2\vec{OB} + \vec{OC}}{3}$ ,  $\vec{OP} = \frac{2\vec{OC} + \vec{OD}}{3}$  și se adună aceste egalități.

9. Fie  $O$  un punct în plan. Rezultă  $\vec{O}_1\vec{O}_2 = \vec{OO}_1 + \vec{OO}_2 = \frac{\vec{OB} + \vec{OD}}{2} - \frac{\vec{OA} + \vec{OC}}{2}$ , iar  $\vec{AD} + \vec{BC} = \vec{OD} - \vec{OA} + \vec{OC} - \vec{OB} = \vec{OD} + \vec{O}_1\vec{O}_2 - (\vec{OA} + \vec{OC})$  etc. b) Egalitatea se scrie  $\vec{AD} + \vec{BC} = 3\vec{O}_1\vec{O}_2$ , sau  $2\vec{O}_1\vec{O}_2 = 3\vec{O}_1\vec{O}_2$ , deci  $\vec{O}_1\vec{O}_2 = \vec{0}$  și  $O_1 = O_2$ .

10. a) *Soluția geometrică.* Fie  $O$  centrul pătratului și  $\{P\} = \vec{BD} \cap \vec{AM}$ . Din asemănarea  $\triangle ABP \sim \triangle MOP$  se obține  $\frac{OP}{AP} = \frac{MO}{AP} = \frac{1}{2}$ , deci  $BP = 2PO$ . Dar  $OB = OD$  și rezultă că  $BP = \frac{1}{2}PD$ .

*Soluția vectorială.* Fie  $\frac{BP}{DP} = \alpha$ . Se obține că  $\vec{AP} = \frac{\alpha\vec{AD} + b\vec{AB}}{\alpha + b}$ ,  $\vec{AM} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2}$ . Deoarece vectorii  $\vec{AP}$  și  $\vec{AM}$  sunt coliniari, există  $\alpha \in \mathbb{R}$  astfel încât  $\alpha\vec{AM} = \vec{AP}$ . Avem  $\alpha \cdot \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2} = \frac{\alpha\vec{AD} + b\vec{AB}}{\alpha + b}$ , iar după înlocuirea  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$  se obține egalitatea  $\alpha \cdot \frac{2\vec{AB} + \vec{AD}}{2} = \frac{\alpha\vec{AD} + b\vec{AB}}{\alpha + b}$ . Deoarece  $\vec{AB}$  și  $\vec{AD}$  sunt

vectori independenți se obțin egalitățile scalare  $\alpha \cdot \frac{b}{\alpha + b} = \frac{\alpha}{\alpha + b}$  și  $\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{\alpha + b}$ , de unde  $b = 2a$ . b) *Soluția geometrică.* Fie  $\{P\} = \vec{AB} \cap \vec{CD}$ . Triunghiurile  $ABM$  și  $OCM$  sunt congruente, deci  $QC = AB = CD$  și în [1]  $2QR$ . *Soluția vectorială.* Fie  $\{R\} = a$ . Rezultă că  $\vec{AM} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2}$ ,  $\vec{AQ} = \frac{b\vec{AC} + a\vec{AD}}{a + b}$  și din coliniaritatea

vectorilor  $\vec{AM}$  și  $\vec{AQ}$  avem  $\alpha \cdot \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2} = \frac{b\vec{AC} + a\vec{AD}}{\alpha + b}$ . Se substituie  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$

și se face schema ca vectorii  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AD}$  sunt liniar independenți. Se obține  $b = 2a$ . [11] Fie  $\{P\} = \vec{PM} = \vec{AP} \cap \vec{BQ} = \vec{AP} \cap \vec{BN} \Rightarrow$  Notăm  $\frac{AP}{PN} = \frac{a}{b}$ . Obținem:

$$BP = \frac{a\vec{BN} + b\vec{BA}}{a + b}, \vec{BM} = \frac{\vec{BA} + \vec{BP}}{2}. \text{ Dar } BP = b\vec{PM} \text{ și rezultă că } \frac{2a\vec{BC} + b\vec{EA}}{a + b}$$

$$\alpha \cdot \frac{\vec{BA} + \vec{BC}}{2} \Rightarrow b = 2a. \text{ b) Se notează } \frac{AQ}{AB} = \frac{a}{b}. \text{ Se scrie că } \vec{NQ} = \frac{a\vec{NB} + b\vec{NA}}{a + b}$$

$$\frac{2a\vec{NC} + b\vec{NA}}{a + b}, \vec{MN} = \frac{\vec{NA} + \vec{NC}}{2} \text{ și } \vec{NQ} = \alpha\vec{NM}. \text{ Rezultă } b = 2a.$$

[12]  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{1}{4}$ . [13] a)  $\{P\} = \vec{AC} \cap \vec{DN}$ . Rezultă  $AP = 2PC$ . b)  $\frac{1}{3}$ ; c) Fie

$$\{Q\} = \vec{CM} \cap \vec{DN} \text{ și } \frac{MQ}{DQ} = \frac{a}{b}. \text{ Se scrie } \vec{CQ} = \alpha\vec{CM} \text{ și } \vec{CQ} = \frac{a\vec{CD} + b\vec{CN}}{a + b}$$

$$\vec{CM} = \frac{\vec{CA} + \vec{CB}}{2} = \frac{\vec{CA} + 2\vec{CN}}{2} \text{ și } \vec{CA} = \vec{CB} + \vec{CD} = 2\vec{CN} + \vec{CD}. \text{ Rezultă } b = 4a.$$

d)  $DP = 2PN$ ; e) Dacă  $\{S\} = \vec{AN} \cap \vec{CM}$  se obține  $CS = 2SM$ .

[14]  $\vec{AF} = \frac{\vec{AE} + \vec{AC}}{2}$ ,  $\vec{AD} = \frac{\vec{AB} + 2\vec{AC}}{3} = \frac{2\vec{AE} + 2\vec{AC}}{3} = \frac{2}{3}\vec{AF}$ , deci  $A, F, D$  coliniare.

[15]  $\frac{2}{3}$ . [16] Fie  $\{Q\} = \vec{CD} \cap \vec{BN}$ . a) Se găsește  $DQ = 2QC$ . b) Fie  $\{R\} = \vec{BP} \cap \vec{CD}$ .

Rezultă  $CR = 2RD$ . [17] Fie  $\{M\} = \vec{AD} \cap \vec{EF}$ ,  $\{N\} = \vec{AC} \cap \vec{EF}$ ,  $\{P\} = \vec{BD} \cap \vec{EF}$ . Se obține  $AM = 5MD$ ,  $CN = \frac{4}{5}NA$ ,  $QB = 2QD$ .

[19] Fie  $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C, \vec{r}_D$  vectorii de poziție ai punctelor  $A, B, C, D$ . Se obțin:  $\vec{r}_A = \frac{\vec{r}_A + \alpha\vec{r}_B}{1 + \alpha}$ ,  $\vec{r}_B = \frac{\vec{r}_B + \alpha\vec{r}_C}{1 + \alpha}$ ,  $\vec{r}_C = \frac{\vec{r}_C + \beta\vec{r}_D}{1 + \beta}$ ,  $\vec{r}_D = \frac{\vec{r}_D + \beta\vec{r}_A}{1 + \beta}$ . Considerăm  $N \in (GH)$

astfel încât  $\frac{GN}{NH} = \alpha$  și  $M \in (EF)$  cu  $\frac{FM}{ME} = \beta$ . Se obține:

$$\vec{r}_M = \frac{\vec{r}_F + \beta\vec{r}_E}{1 + \beta} = \frac{\vec{r}_A + \alpha\vec{r}_D + \beta\vec{r}_B + \alpha\beta\vec{r}_C}{(1 + \alpha)(1 + \beta)} \text{ și } \vec{r}_N = \frac{\vec{r}_G + \alpha\vec{r}_H}{1 + \alpha} = \frac{\vec{r}_A + \alpha\vec{r}_D + \beta\vec{r}_B + \alpha\beta\vec{r}_C}{(1 + \alpha)(1 + \beta)} = \vec{r}_M,$$

deci  $M = N$ . [20] Avem  $\vec{r}_M = \frac{\vec{r}_A + k\vec{r}_D}{1 + k}$ ,  $\vec{r}_E = \frac{\vec{r}_E + k\vec{r}_B}{1 + k}$ ,  $\vec{r}_F = \frac{\vec{r}_F + k\vec{r}_C}{1 + k}$ ,  $\vec{r}_G = \frac{\vec{r}_G + k\vec{r}_A}{1 + k}$ .

Se obține că  $\vec{r}_M + \vec{r}_E = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_E + k\vec{r}_A + k\vec{r}_E}{1 + k}$ ,  $\vec{r}_F + \vec{r}_G + k\vec{r}_B + k\vec{r}_C = \vec{r}_B + \vec{r}_C$ , deci segmentele  $[MP]$  și  $[NQ]$  au același mijloc.

[21] Avem relațiile  $\vec{BM} = 3\vec{MA}$ ,  $3\vec{CN} = 2\vec{NA}$  și  $9\vec{PC} = 2\vec{PB}$ . Obținem:  $\vec{PM} = \frac{3\vec{PA} + \vec{PB}}{3} = \frac{6\vec{PA} + 9\vec{PC}}{6} = \frac{2\vec{PA} + 3\vec{PC}}{2}$ ,  $\vec{PN} = \frac{2\vec{PA} + 3\vec{PC}}{5}$ , deci  $PM = \frac{5}{2}PN$  și

punctele  $M, N, P$  sunt coliniare. [22] a) Fie  $\{P\} = \vec{AG} \cap \vec{BC}$  și  $\frac{BP}{PC} = \frac{a}{b}$ . Rezultă

$$\text{că } \vec{AO} = \frac{\vec{AM} + \vec{AN}}{2} \text{ și } \vec{AP} = \frac{b\vec{AB} + a\vec{AC}}{a + b} = \frac{3b\vec{AM} + 6a\vec{AN}}{2(a + b)}. \text{ Din coliniaritatea}$$

vectorilor  $\overline{AO}$  și  $\overline{AP}$  se obține că  $\overline{AP} = \alpha \overline{AO}$  și din liniar independența vectorilor  $\overline{AM}$  și  $\overline{AN}$  avem  $\frac{3b}{a+b} = \frac{\alpha}{2}$  și  $\frac{6a}{a+b} = \frac{\alpha}{2}$ . Rezultă că  $b = 2a$ .

**b)**  $\{Q\} = CO \cap AB$  și  $\frac{AQ}{QB} = \frac{a}{b}$ . Patrulaterul ANPM este paralelogram ( $MP \parallel AN$ ,  $NP \parallel AM$ ). Rezultă că  $AO = OP$ . Se obține  $\overline{CO} = \frac{\overline{CA} + \overline{CP}}{2}$  și  $\overline{CQ} = \frac{a\overline{CB} + b\overline{CA}}{a+b} = \frac{b\overline{CA} + \frac{3}{2}a\overline{CP}}{a+b}$ . Din coliniaritatea vectorilor  $\overline{CQ}$  și  $\overline{CO}$  și liniar independența vectorilor  $\overline{CA}$  și  $\overline{CP}$  se obține  $\overline{CQ} = \alpha \overline{CO}$  și  $\frac{b}{a+b} = \frac{\alpha}{2}$ ,  $\frac{3a}{2(a+b)} = \frac{\alpha}{2}$ , deci  $b = 3a$  sau  $BQ = 3AQ$ . **c)**  $\frac{1}{3}$ .

**23.** Fie  $\{O\} = ME \cap DF$ . Se obțin  $\frac{DO}{OF} = \frac{3}{4}$ ,  $\frac{MO}{OE} = \frac{1}{6}$ .

**24.** Se obține că  $\frac{AN}{ND} = \frac{BM}{MC} = \frac{\alpha}{1-\alpha} = m$ . Fie F și G mijloacele segmentelor  $[MN]$  și  $[CD]$ . Avem că  $\overline{FG} = \frac{\overline{ND} + \overline{MC}}{2}$  și  $\overline{EF} = \frac{\overline{AN} + \overline{BM}}{2} = \frac{m\overline{ND} + m\overline{MC}}{2} = m\overline{FG}$ , deci E, F, G sunt coliniare.

**25. a)** Avem  $\overline{AM} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \overline{MC}$ ,  $\overline{CN} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \overline{NE}$ . **a)**  $\overline{BM} = \alpha \overline{BC} + (1-\alpha) \overline{BA}$ ,  $\overline{BE} = 2\overline{BA} + 2\overline{BC}$ ,  $\overline{BN} = \alpha \overline{BE} + (1-\alpha) \overline{BC} = 2\alpha \overline{BA} + (1+\alpha) \overline{BC}$ .

**b)** Vectorii  $\overline{BM}$ ,  $\overline{BN}$  sunt coliniari dacă  $\frac{\alpha}{1+\alpha} = \frac{1-\alpha}{2\alpha}$ , deci  $\alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Se obține  $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . **26.**  $r_1 = 3$ ,  $r_2 = \frac{1}{4}$ .

**27.** Din teorema lui Thales rezultă: **a)**  $\frac{2}{n} = \frac{n^2}{4}$  și  $n = 2$ ; **b)**  $\frac{n}{14} = \frac{4}{n+1}$  și  $n = 7$ ;

**c)**  $mn = 8$  cu soluțiile  $(m, n) \in \{(1, 8), (2, 4), (4, 2), (8, 1)\}$ . **28.** Din teorema lui Thales se obțin relațiile  $n(n+1) = 3m$ ,  $n^3 = pm$ , cu  $p = \frac{3m}{n^2} \in \mathbb{N}$ . Avem

$p = \frac{3n^2}{n+1} = 3(n-1) + \frac{3}{n+1} \in \mathbb{N}$ . Rezultă  $n \in \{0, 2\}$  cu soluția cerută  $n = 2$ ,  $m = 2$ ,  $p = 4$ .

**29.** Cu teorema lui Thales se obține  $mn = 18$  cu soluțiile:  $(m, n) \in \{(1, 18), (2, 9), (3, 6), (6, 3), (9, 2), (18, 1)\}$ . Cum ABC este echilateral rezultă  $m = 6$ ,  $n = 3$ ,  $p = -\frac{2}{3}$ .

**30. a)**  $\frac{NC}{AC} + \frac{PB}{AB} = \frac{MC}{BC} + \frac{MB}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1$ ; **b)**  $\frac{PA}{AB} + \frac{NA}{NC} = \frac{MC}{BC} + \frac{MB}{BC} = 1$ .

**31.** M este mijlocul lui  $[BC]$ . Avem:  $\frac{AE}{AB} = \frac{DM}{BM} = \frac{DM}{MC} = \frac{AF}{AC}$ .

**32.** Trebuie arătat că  $MP + NP = 2AD$ . Avem  $\frac{MP}{AD} = \frac{BP}{BD}$  și  $\frac{NP}{AD} = \frac{PC}{CD}$  și rezultă că  $MP + NP = \frac{BP \cdot AD}{BD} + \frac{PC \cdot AD}{CD} = \frac{2 \cdot AD}{BC} (BP + PC) = 2AD$ .

**33.**  $\triangle MND \sim \triangle ABD \Rightarrow \frac{MD}{AD} = \frac{MN}{AB}$ . Din  $\triangle MNP \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC}$  etc.

**34.** Fie  $E \in AO$ ,  $F \in CO$ , cu  $ME \parallel BD$  și  $NF \parallel BD$ . Din teorema lui Thales în  $\triangle AOB$  și  $\triangle COD$  rezultă  $\frac{MA}{MB} = \frac{AE}{OE}$ ,  $\frac{ND}{NC} = \frac{OF}{FC}$ , deci  $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{ND}{NC} = \frac{AE}{OE} \cdot \frac{OF}{FC}$ . Dar  $\triangle OEM \sim \triangle OFN \Rightarrow \frac{OE}{OF} = \frac{ME}{NF}$ , iar  $\triangle AEM \sim \triangle AOB$  și  $\triangle CFN \sim \triangle COD \Rightarrow \frac{AE}{ME} = \frac{OA}{OB}$ ,  $\frac{CF}{NF} = \frac{OC}{OD}$ . Rezultă că  $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{ND}{NC} = \frac{AE}{FC} \cdot \frac{NF}{ME} = \frac{OA}{OB} \cdot \frac{OD}{OC}$ .

**35.** Fie  $MN \perp BC$ ,  $N \in BC$ . Atunci rezultă că  $\frac{MD}{AD} = \frac{MN}{h_A} = \frac{MN \cdot BC}{h_A \cdot BC} = \frac{\text{aria}(MBC)}{\text{aria}(ABC)}$ .

Analog se obțin egalitățile  $\frac{ME}{EB} = \frac{\text{aria}(MAC)}{\text{aria}(ABC)}$ ,  $\frac{MF}{CF} = \frac{\text{aria}(MAB)}{\text{aria}(ABC)}$ . Prin adunare se obține egalitatea cerută.

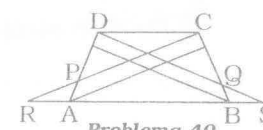
**36.** Se arată, folosind teorema lui Thales, că  $GF \parallel BD \parallel EH$  și  $GF = HE$ .

**37.** Fie  $\{O\} = AC \cap BC$ . Din  $\triangle OAF \sim \triangle OCB \Rightarrow \frac{OF}{OB} = \frac{OA}{OC}$ , iar  $\triangle OBE \sim \triangle ODA \Rightarrow \frac{OE}{OA} = \frac{OB}{OD}$  și se obține că  $\frac{OE}{OF} = \frac{OC}{OD}$ . Se folosește apoi reciproca teoremei lui

Thales. **38.** Avem, folosind teorema lui Thales:  $\frac{AS}{SB} = \frac{AR}{RC} = \frac{BQ}{QC} = \frac{BP}{PA} = \frac{CN}{NA} = \frac{CM}{MA}$ , iar din reciproca teoremei lui Thales,  $MS \parallel AC$ . **39.** Cu teorema lui Thales rezultă  $\frac{DN}{NC} = \frac{AM}{MB} = \frac{AO}{OC} = \frac{AQ}{QD} = \frac{BP}{PC}$ , deci  $\frac{DN}{NC} = \frac{BP}{PC}$  și  $\frac{AQ}{QD} = \frac{AM}{MB}$ . Din reciproca teoremei lui Thales rezultă că  $NP \parallel BD$ ,  $MQ \parallel BD$  etc.

**40.** Fie  $\{R\} = AB \cap CP$  și  $\{S\} = AB \cap DQ$ . Avem  $\triangle ARP \sim \triangle DCP \Rightarrow \frac{AP}{PD} = \frac{AR}{DC}$  (1).

Cu teorema lui Thales se obține  $\frac{BQ}{QC} = \frac{BA}{AR}$  și  $\frac{BQ}{QC} = \frac{BS}{DC}$ . Calculăm  $\frac{AB}{BS} = \frac{BQ \cdot AR}{QC \cdot DC} = \frac{AR}{DC} = \frac{AP}{PD}$  și



din reciproca teoremei lui Thales se obține că  $DS \parallel BP$ .

41. Se obține că AM are o direcție fixă. Locul geometric este dreapta ce trece prin A de direcție dată v. 42. Fie O un punct în plan. a) Din relația dată se obține că  $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OC}$ , deci locul geometric conține un singur punct M, astfel încât ACM să fie paralelogram. b) Relația dată se aduce la forma  $\vec{MA} = \vec{AC}$ . Locul geometric este format din două puncte în raport cu A. c) Se obține:  $|\vec{MA}| = AB + BC + CA = p$ , deci locul geometric este cercul de centru A și rază  $R = AB + BC + AC$ . 43. Notăm  $|\vec{TF}| = AB = DN$ .

a) Din  $\triangle BTN \sim \triangle CDN \Rightarrow \frac{BT}{CD} = \frac{BN}{CN} \Rightarrow BT = \frac{1}{2} \cdot DN = \frac{3}{2}$ .

Din  $\triangle DCP \sim \triangle TMP \Rightarrow \frac{DP}{PT} = \frac{CD}{TM} = \frac{8}{5}$ .

Obținem că  $AP = \frac{TP \cdot AD + DP \cdot AT}{TP + PD} = \frac{5}{13} AD + \frac{8}{13} AT = \frac{5}{13} AD + \frac{12}{13} AB$  b)  $AP = 1$ .

2. Centre de greutate (pag. 191)

1. N centru de greutate conduce la  $\vec{AN} = 2\vec{NM}$  și  $\vec{AN} + 2\vec{MN} = \vec{0}$ . Reciproc, fie că  $\vec{AN} = 2\vec{MN}$ . Atunci, dacă N nu este centru de greutate, notăm F mijlocul lui [BC] și  $|\vec{G}| = AF \cap BE$ . Rezultă că  $\frac{AN}{NM} = \frac{AG}{GF} = 2$ , deci din reciproca teoremei lui Thales se obține că  $NG \parallel MF$ , ceea ce nu se poate. Asadar,  $N = G$ .

2. CN este mediana. Se folosește problema 1.

3. a)  $\vec{GBG}$  este paralelogram b)  $\vec{G} = \frac{1}{3}(\vec{A} + 2\vec{C})$ ,  $\vec{G} = \frac{1}{3}(\vec{A} + 2\vec{B})$  și se obține că  $(2\alpha + \beta)\vec{G} = \vec{B} + (2\alpha + \gamma)\vec{C} = \vec{0}$ , deci  $\beta = \gamma = -2\alpha$ .

4. M, N sunt mijloacele laturilor [BC] și [CD]. Avem  $\vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OA} = \vec{OC} + \vec{OA} = \vec{0}$ , deci O este centru de greutate pentru AMN.

5. Fie  $AG_1 = BC = [D]$ ,  $AG_2 = BC = [E]$ . Rezultă că  $\frac{AG_1}{GD} = 2 = \frac{AG_2}{G_2D}$ , deci

$G_1G_2 \parallel BC$ , din reciproca teoremei lui Thales. Se obține că  $\frac{G_1G_2}{DE} = \frac{2}{3}$  și  $BC = 2DE = 3G_1G_2$ .

6. Fie M mijlocul laturii [AB]. Rezultă că  $\frac{MG_1}{G_1D} = \frac{1}{2} = \frac{MG_2}{G_2C}$ , deci  $G_1G_2 \parallel CD$  și  $CD = 3G_1G_2$ .

7. Fie O centrul paralelogramului. Rezultă că  $M \in [BO]$ ,  $N \in [CO]$ ,  $P \in [DO]$ ,  $Q \in [AO]$ , astfel încât  $\frac{OM}{OB} = \frac{ON}{OC} = \frac{OP}{OD} = \frac{OQ}{OA} = \frac{1}{2}$ , deci  $MN \parallel CD$ ,  $NP \parallel CD$ ,  $PQ \parallel AD$ ,  $QM \parallel AB$ .

8. Fie M mijlocul laturii [DC]. Se arată că  $G_1G_2 \parallel AB$  și  $\vec{AB} = 3G_1G_2$ . Avem  $\vec{AG}_1 - \vec{AG}_2 = \frac{2}{3}(\vec{AM} - \vec{BM}) = \frac{2}{3}\vec{AB} = 2G_1G_2$ .

9. Fie M, N, P, Q mijloacele laturilor [AB], [BC], [CD], [DA]. Patrulaterul MNPQ este paralelogram și  $G_1, G_2, G_3, G_4$  împart segmentele [OM], [ON], [OP], [OQ] în același raport, deci  $G_1G_2 \parallel MN$ ,  $G_2G_3 \parallel NP$ ,  $G_3G_4 \parallel PQ$ ,  $G_4G_1 \parallel MQ$ .

10. Fie  $|\vec{O}| = AC \cap EP$ . Rezultă că ENAQ este paralelogram cu centrul în G, deci  $NQ \parallel BC$ . Deoarece  $OE = OG$  rezultă că  $NQ, EM, BC$  sunt paralele echidistante, deci  $NQ = EM$  și NQME este paralelogram cu centrul P. Asadar M, N, P sunt coliniare.

11. Triunghiul ABC este echilateral median al triunghiului MNP. Se obține  $\vec{GM} + \vec{GN} + \vec{GP} = \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ .

13. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului MPR se obține că:

$$\vec{0} = \vec{GM} + \vec{GP} + \vec{GR} = \frac{\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} + \vec{GE} + \vec{GF}}{2} = \vec{GN} + \vec{GQ} + \vec{GS}$$

14.  $\vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CP} = (\vec{AG}_1 + \vec{G}_1G_2 + \vec{G}_2M) + (\vec{BG}_1 + \vec{G}_1G_2 + \vec{G}_2N) + (\vec{CG}_1 + \vec{G}_1G_2 + \vec{G}_2P) = 3\vec{G}_1G_2$ , având în vedere că  $\vec{G}_1A + \vec{G}_1B + \vec{G}_1C = \vec{0} = \vec{G}_2M + \vec{G}_2N + \vec{G}_2P$ .

15. Avem  $\vec{0} = \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = (\vec{GM} + \vec{MA}) + (\vec{GN} + \vec{NB}) + (\vec{GP} + \vec{PC})$  etc.

17. Fie  $\vec{BM} = a\vec{MA}$ ,  $\vec{CN} = b\vec{NA}$  și P mijlocul segmentului [BC]. Rezultă  $\vec{AM} = \frac{1}{a+1}\vec{AB}$ ,  $\vec{AN} = \frac{1}{b+1}\vec{AC}$ ,  $\vec{MB} = \frac{a}{a+1}\vec{AB}$ ,  $\vec{NC} = \frac{b}{b+1}\vec{AC}$ . (1). Descompunem vectorul  $\vec{AG}$  după  $\vec{AM}$  și  $\vec{AN}$ . Rezultă că există  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  astfel încât  $\vec{AG} = \alpha\vec{AM} + \beta\vec{AN}$ . Din relațiile (1) și  $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AP} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC})$  rezultă că  $\frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC}) = \frac{\alpha}{a+1}\vec{AB} + \frac{\beta}{b+1}\vec{AC}$ . Dar  $\vec{AB}$  și  $\vec{AC}$  sunt necoliniari, deci  $a+1 = 3\alpha$ ,  $b+1 = 3\beta$ . Dacă  $a+b=1$  atunci  $\alpha + \beta = 1$  și deci  $\vec{AG} = \alpha\vec{AM} + (1-\alpha)\vec{AN}$  și M, G, N sunt coliniare. Reciproc, dacă M, N, G sunt coliniare rezultă că  $\alpha + \beta = 1$ , deci  $a+b=1$  și  $\frac{BM}{MA} + \frac{CN}{NA} = 1$ .

18. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Se obține  $\vec{GD} + \vec{GE} + \vec{GF} = -\vec{GA} + \vec{AD} + \vec{GB} + \vec{BE} + \vec{GC} + \vec{CF} = \vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF}$ . Fie M simetricul lui E în raport cu BC. Se arată că  $\vec{MC} = \vec{BE}$ ,  $\vec{FM} = \vec{AD}$ . Rezultă că  $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{FM} + \vec{MC} + \vec{CF} = \vec{0}$ .

**19.** Fie G centrul de greutate al patrulaterului. Pe diagonala BD construim, spre A, triunghiurile echilaterale BDE, BDF, astfel încât C, E sunt în același semiplan determinat de BD, iar A și F în celălalt semiplan. Din problema 62, cu  $\triangle ABD$  și  $\triangle BCD$  avem că  $\overline{AM} + \overline{BE} + \overline{DQ} = \vec{0}$  și respectiv  $\overline{BN} + \overline{CP} + \overline{DF} = \vec{0}$ . Prin adunare se obține că:  $\vec{0} = \overline{AM} + \overline{BE} + \overline{DQ} + \overline{BN} + \overline{CP} + \overline{DF} = \overline{AM} + \overline{BN} + \overline{CP} + \overline{DQ}$ . Se arată apoi că  $\overline{GM} + \overline{GN} + \overline{GP} + \overline{GQ} = \vec{0}$ .

**20.** Din problema 58 se obține că  $\overline{AA_1} + \overline{BB_1} + \overline{CC_1} = \vec{0}$ .

**21.** Din relațiile  $\overline{G_1B} + \overline{G_1C} + \overline{G_1D} = \vec{0}$  se obține că  $3\overline{OG_1} = \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}$ . Analog vom avea că  $3\overline{OG_2} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OD}$ ,  $3\overline{OG_3} = \overline{OA} + \overline{OC} + \overline{OD}$ ,  $3\overline{OG_4} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$  și se adună aceste egalități.

**22.** Notăm  $\frac{AM}{AB} = m$ ,  $\frac{BN}{BC} = n$ ,  $\frac{DP}{DC} = p$ . Relația  $AM + DP = BN$  este echivalentă cu  $m + p = n$ . Fie G centrul de greutate al triunghiului MNP. Atunci  $G \in AC$  dacă și numai dacă  $\overline{OG}$  și  $\overline{OC}$  sunt coliniari, deci  $\overline{OG} = \alpha \overline{OC}$ . (1). Folosind relația lui Leibniz rezultă că  $\overline{OM} + \overline{ON} + \overline{OP} = 3\overline{OG}$ , cu O centrul rombului. Dar  $\overline{OM} = (1 - m)\overline{OA} + m\overline{OB}$ ,  $\overline{ON} = (1 - n)\overline{OB} + n\overline{OC}$ ,  $\overline{OP} = (1 - p)\overline{OD} + p\overline{OC}$ . Rezultă că  $3\overline{OG} = (1 - m - n - p)\overline{OA} + (m + p - n)\overline{OB}$ . Dar  $G \in AC$  implică  $\overline{OG}$  și  $\overline{OA}$  coliniari, deci  $(m + p - n)\overline{OB} = \vec{0}$ . Cum  $O \neq B$  rezultă că  $m + p = n$ .

**24.** Se folosește relația lui Leibniz:  $3\overline{OG} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$ .

**25. a)** Fie G și  $G_1$  centrele de greutate ale celor două triunghiuri. Avem relațiile  $3\overline{GG_1} = \overline{GM} + \overline{GN} + \overline{GP} = (\alpha - \beta)\overline{AB} + (\beta - \gamma)\overline{AC}$  și  $\overline{AG} = \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{2}$ . Din coliniaritatea vectorilor  $\overline{GG_1}$  și  $\overline{AG}$  se obține că  $\frac{\alpha - \beta}{3} = \frac{1}{2} = \frac{\beta - \gamma}{3}$ , deci  $\alpha + \gamma = 2\beta$ .

**b)** Din a) se deduc relațiile  $\alpha + \beta = 2\gamma$ ,  $\beta + \gamma = 2\alpha$ , deci  $\alpha = \beta = \gamma$ .

**3. Teorema bisectoarei. Relația lui Sylvester (pag. 195)**

**1.**  $BD = \frac{ac}{b+c}$ ,  $CD = \frac{ab}{b+c}$ ; **3.** Se aplică reciproca teoremei bisectoarei.

**4. a)** AD împarte segmentul [BC] în raportul  $k = \frac{c}{b}$ . Rezultă că:

$$\overline{AD} = \frac{\overline{AB} + k\overline{AC}}{1+k} = \frac{b\overline{AB} + c\overline{AC}}{b+c}; \text{ b) În relația de la a) se scrie: } b(\overline{AM} + \overline{MD}) + c(\overline{AM} + \overline{MC}) = (b+c)(\overline{AM} + \overline{MD}) \text{ etc.}$$

**7. a)** Se scrie că  $\overline{IA} = \overline{IG} + \overline{GA}$ ,  $\overline{IB} = \overline{IG} + \overline{GB}$ ,  $\overline{IC} = \overline{IG} + \overline{GC}$ . **b)** Se folosește relația lui Leibniz cu  $M = I$ . **9.** Se aplică teorema bisectoarei în  $\triangle ABN$ ,  $\triangle ANC$  și  $\triangle ABC$ . **10. a)**  $\frac{AS}{SM} + \frac{BT}{TM} = \frac{AN}{MN} + \frac{BN}{MN} = 1$ ; **b)** Se folosește că  $\triangle ANP$  și  $\triangle BNQ$  sunt isoscele și  $AP = CQ$ . **c)** Se aplică problema 61.

**11.** (AD bisectoare. Rezultă că  $\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{CN}$  și  $\frac{BD}{DC} = \frac{MB}{NC}$ .

Dar  $m(\widehat{MBD}) = m(\widehat{NCD})$ , deci  $\triangle DMB \sim \triangle DCN$  și M, D, N coliniare. *Reciproc:* Se are în vedere asemănarea  $\triangle DBM \sim \triangle DCN$ .

**12.** Se aplică teorema bisectoarei în  $\triangle ABD$  și  $\triangle ABM$  și teorema catetei:  $AB^2 = AD \cdot BC$ .

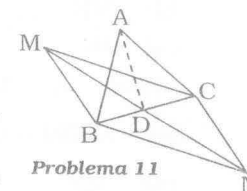
**13.** Fie O centrul paralelogramului. Se obține că  $\frac{MD}{MB} = \frac{AD}{AB} = \frac{AN}{NC}$  și apoi  $\frac{OM}{OD} = \frac{ON}{NA}$ , deci  $MN \parallel AD$ .

**14. a)** Din teorema bisectoarei în triunghiul CAE se obține că  $\frac{CF}{EF} = \frac{AC}{AE}$ . Din  $\triangle BFE \sim \triangle DCE$  rezultă că  $\frac{CE}{EF} = \frac{DC}{BF} = \frac{AB}{BF}$ . Atunci  $\frac{AB}{BF} \cdot \frac{AC}{AE} = \frac{CE}{EF} \cdot \frac{CF}{EF} = 1$ .

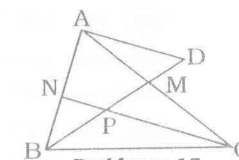
**b)** Teorema bisectoarei în  $\triangle ACG$ , asemănările  $\triangle EBG \sim \triangle EDA$ ,  $\triangle EBF \sim \triangle EDC$  conduc la egalitățile  $\frac{BC}{BG} \cdot \frac{CF}{EF} = \frac{AD}{BG} \cdot \frac{CF}{EF} = \frac{DE}{BE} \cdot \frac{CF}{EF} = \frac{CE}{EF} \cdot \frac{CF}{EF} = 1$ .

**15.** Construim  $AD \parallel CN$ . Patrulaterul CPAD este paralelogram. Din  $NP \parallel AD$  se obține că  $\frac{PC}{PN} = \frac{AD}{NP} = \frac{AB}{BN} = 1 + \frac{AN}{NB} = 1 + \frac{AC}{BC}$ .

**16.** Se obține că ABE este isoscel, deci  $AB = AE$ . Din teorema bisectoarei în  $\triangle ADC$  se obține  $\frac{DE}{CE} = \frac{AD}{AC}$ , deci  $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{2}$  și  $m(\widehat{C}) = 30^\circ$ , deci  $m(\widehat{DAC}) = 60^\circ$ ,  $m(\widehat{B}) = 60^\circ$  și  $m(\widehat{A}) = 90^\circ$ .



Problema 11



Problema 15

**17.** Construim paralelogramele BDNP și CENQ. Deoarece  $NP \parallel \overline{AB}$ ,  $NQ \parallel \overline{AC}$  vom arăta că  $[NM]$  este bisectoarea unghiului  $\widehat{PNQ}$ . Din  $BP \parallel CQ$  se obține că

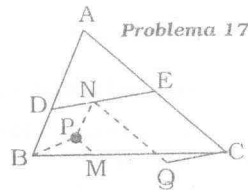
$$\widehat{PBM} \cong \widehat{QCM}, \quad (1). \quad \text{Dar } \frac{BP}{CQ} = \frac{DN}{NE}, \quad \frac{ND}{NE} = \frac{MB}{MC}, \quad \text{deci}$$

$$\frac{BP}{CQ} = \frac{MB}{MC}, \quad (2). \quad \text{Din relațiile (1) și (2) rezultă că}$$

$\triangle PBM \sim \triangle QCM$ , deci  $\widehat{BMP} \cong \widehat{CMQ}$  și P, M, Q coliniare.

Din  $\triangle PBM \sim \triangle QCM$  se obține că  $\frac{PM}{QM} = \frac{BM}{CM}$  și

$$\frac{PM}{QM} = \frac{NP}{NQ}, \quad \text{deci } [NM] \text{ este bisectoarea unghiului } \widehat{PNQ}.$$



**18.** Fie E, F mijloacele segmentelor  $[MN]$  și  $[BC]$ . Avem  $2\overline{EF} = \overline{MB} + \overline{NC}$ . Dacă  $P \in \overline{AB}$ ,  $Q \in \overline{AC}$ , astfel încât  $\overline{AP} = \overline{MB}$  și  $\overline{AQ} = \overline{NC}$ , rezultă că vectorul sumă  $\overline{AP} + \overline{AQ}$  este orientat pe bisectoarea unghiului  $\widehat{BAC}$ , deci vectorii  $\overline{EF}$  și  $\overline{AP} + \overline{AQ}$  fiind coliniari au aceeași direcție.

**20.** Centrul cercului circumscris triunghiului  $A_1B_1C_1$  este ortocentrul H al triunghiului ABC. Din relația lui Sylvester se obține  $\overline{HA_1} + \overline{HB_1} + \overline{HC_1} = \overline{HH_1}$ . Dar  $\overline{HB} = \frac{\overline{HA_1} + \overline{HC_1}}{2}$ ,  $\overline{HA} = \frac{\overline{HB_1} + \overline{HC_1}}{2}$ ,  $\overline{HC} = \frac{\overline{HA_1} + \overline{HB_1}}{2}$ . Prin adunare rezultă că  $\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} = \overline{HA_1} + \overline{HB_1} + \overline{HC_1} = \overline{HH_1}$ .

**25.** Fie  $MH \cap BN = \{E\}$ ,  $MN \cap BH = \{F\}$ . În triunghiul BHN, HN și NM sunt înălțimi, deci BM este a treia înălțime. Rezultă că  $BM \perp NH$  și  $CM \parallel NH$ , deoarece  $BM \perp CM$ . Din  $HM \perp BN$  și  $CN \perp BN$  se obține  $CN \parallel HM$ .

**26.** Fie  $AD \perp BC$ ,  $D \in (BC)$  și M intersecția cercului cu AD. Se arată că  $\triangle BDM \cong \triangle BDH$  și rezultă că  $DH = DM$ .

**27.** Fie O centrul cercului circumscris, E mijlocul laturii  $[BC]$  și N intersecția paralelei prin M la BC cu cercul (problema 95). Rezultă că AN este diametru și cum  $OE \perp BC$  se obține că  $OE \perp MN$ . În  $\triangle HMN$ , DE este linie mijlocie și se obține că H, E, N sunt coliniare.

**28.** Paralela prin F la HE intersectează înălțimea AH în M. Se obține  $m(\widehat{FHM}) = B$ ,  $m(\widehat{FMH}) = C$  și cum  $FH = AB$  rezultă că  $HM = BC = HD$ , iar FHME este paralelogram. Așadar  $\overline{HF} + \overline{HE} = \overline{HM} = -\overline{HD}$ .

**29.** Fie Q mijlocul lui  $[GH]$ . Trebuie arătat că  $\overline{QM} + \overline{QN} + \overline{QP} = \vec{0}$ . Se exprimă  $\overline{QM}$  în funcție de  $\overline{QD}$  și  $\overline{QB}$ ,  $\overline{QN}$  în funcție de  $\overline{OE}$  și  $\overline{OC}$ , iar  $\overline{QP}$  în funcție de  $\overline{OA}$  și  $\overline{OF}$ , având în vedere rapoartele date. Se folosește apoi că  $OG = OQ = OH$  și  $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OH} = 3\overline{OG}$ .

**30. a)** Se are în vedere că dacă I este centrul cercului înscris atunci  $\overline{OI} = \frac{a\overline{OA} + b\overline{OB} + c\overline{OC}}{a+b+c}$ , pentru O oarecare din plan. **b)** Dacă  $a = b = c$  din a) se

obține că  $\overline{IA} + \overline{IB} + \overline{IC} = \vec{0}$ . *Reciproc.* Folosim relația lui Leibniz pentru  $M = I$ . Se obține că  $\vec{0} = \overline{IA} + \overline{IB} + \overline{IC} = 3\overline{IG}$ , deci  $I = G$  și ABC este echilateral.

**31.** Dacă ABC este echilateral, bisectoarele sunt mediane și relația rezultă ușor. *Reciproc.*  $\overline{AD} = \frac{b\overline{AB} + c\overline{AC}}{b+c}$ ,  $\overline{BE} = \frac{c\overline{BC} + a\overline{BA}}{c+a}$ ,  $\overline{CF} = \frac{a\overline{CA} + b\overline{CB}}{a+b}$ . Se scrie că  $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \vec{0}$  și se introduc vectorii  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BE}$ ,  $\overline{CF}$  în funcție de  $\overline{AB}$  și  $\overline{AC}$ .  $\overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AC}$ . Se ține seama că  $\overline{AB}$  și  $\overline{AC}$  sunt necoliniari și rezultă că  $a = b = c$ .

**32. b)** În relația de la a) se ia  $P = M$ , se obține că  $\overline{GM} = 3\overline{IM}$ .

**34.** Se aplică teorema bisectoarei în  $\triangle ABD$  și  $\triangle ABC$ .

**35.** Fie E punctul de intersecție al bisectoarei (AD cu cercul circumscris triunghiului ABC). Din  $\triangle ABD \sim \triangle AEC \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC}$  sau  $AB \cdot AC = AD \cdot AE$ . (1).

Din  $\triangle ADC \sim \triangle BDE \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{DC}{DE}$ , deci  $BD \cdot DC = AD \cdot DE$ . (2). Din (1) obținem că  $AB \cdot AC = AD \cdot AE = AD(AD + DE) = AD^2 + AD \cdot DE = AD^2 + BD \cdot DC$ .

**Teste de verificare (pag. 199)**

**Testul nr. 1**

**3.** Din teorema bisectoarei rezultă  $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = \frac{BN}{MC}$ , iar din reciproca teoremei lui Thales se obține  $MN \parallel BC$  etc.

**Testul nr. 2**

**1.** Se obține că  $\frac{DE}{EB} = \frac{GC}{GA}$ , (1). Dar, cu teorema bisectoarei,  $\frac{DE}{BE} = \frac{AD}{AB} = \frac{BC}{AB}$ ,

deci  $\frac{CG}{GA} = \frac{BC}{AB}$ . Cu teorema reciprocă a bisectoarei rezultă că  $[BG]$  este bisectoare în  $\triangle ABC$ . Dacă  $\{H\} = AE \cap BG$ , triunghiul ABC este dreptunghic isoscel, cu  $m(\widehat{H}) = 90^\circ$ . Rezultă că  $BG \perp EF$  și cum  $EG \perp BF$ , punctul G este ortocentrul triunghiului EFB.

**2.** Fie D, E, C coliniare. Se obține că  $\triangle ADE$  este isoscel, cu  $AD = DE$  și  $\triangle BCE$  isoscel, cu  $BC = CE$  etc. *Reciproc.* Fie că  $AB = 2BC$ . Se arată că triunghiurile  $DAE_1$  și  $BE_1C$  sunt isoscele, unde  $E_1$  este mijlocul laturii  $[DC]$  și că  $[AE']$ ,  $[BE']$  sunt bisectoarele unghiurilor  $\widehat{A}$  și  $\widehat{B}$ .

**3.** a) Se arată că  $m(\widehat{AEG}) = 90^\circ - \frac{C}{2} = m(\widehat{AGE})$ . b) Punctul E este pe bisectoarea (CE, deci  $AE = EF$  și  $AC = CF$ . Rezultă că  $CE \perp AF$  și cum  $AD \perp CF$  se obține că G este ortocentrul triunghiului ACF, deci  $FG \perp AC$  și ACFG este romb.

**Testul nr. 3**

**1.** Se arată că  $\triangle AFG$  și  $\triangle GFB$  sunt isoscele. Se obține că  $GF \parallel BC$  etc.  
**3.** Din problema 1 se obține că proiecțiile se află pe linia mijlocie a triunghiului.

**Testul nr. 4**

**1.** Din  $B'C' \parallel BC$  și  $[BB'], [CC']$  bisectoare se obține că  $BC' = C'B' = B'C$  și apoi  $AB = AC$  etc. **2.** Cu teorema bisectoarei se obține că  $\frac{DF}{FC} = \frac{AD}{AC} = \frac{BD}{AC}$  și  $\frac{DE}{AE} = \frac{BD}{AB}$ . Atunci  $EF \parallel AC$  dacă și numai dacă  $\frac{DE}{AE} = \frac{DF}{FC}$ , deci  $AB = AC$  și reciproc. **3.**  $PQ \parallel AC \Leftrightarrow \frac{DQ}{QC} = \frac{DP}{AP} \Leftrightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{BD}{AB} \Leftrightarrow AD = BD \Leftrightarrow A = 90^\circ$ .

**4. Teorema lui Menelau (pag. 201)**

**1.** Se are în vedere teorema bisectoarei exterioare  $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$  și analogele.  
**2.** Se aplică teorema lui Menelau triunghiului ADC și transversalei BM. Se obține  $r = \frac{1}{3}$ . **3.** a) 3; b)  $\sqrt{2}$ . **4.**  $r = \frac{1}{4}$ . **5.** a) Folosind problema 104 se află  $BD = \frac{12\sqrt{2}}{7}$ . Cu teorema bisectoarei se obține că  $\frac{AE}{EC} = \frac{3\sqrt{2}}{5}$ . Cu teorema lui Menelau pentru AMC și transversala BE, (M mijlocul lui (BC)), se obține  $r = \frac{6\sqrt{2}}{5}$ ; b)  $r = \frac{9\sqrt{2}}{35}$ . **6.** Teorema lui Menelau în  $\triangle ABC$  și transversala MPQ ne dau  $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{PB}{PC} \cdot \frac{QC}{QA} = 1$  sau  $\frac{PB}{PC} = \frac{QA}{QC}$ , (1). Din asemănarea triunghiurilor PBY, PCD, respectiv XAQ, DCQ se obține:  $\frac{PB}{PC} = \frac{BY}{DC}$  și  $\frac{QA}{QC} = \frac{XA}{DC}$ . Folosind (1) rezultă că  $\frac{BY}{DC} = \frac{XA}{DC}$  deci  $BY = XA$  și M mijlocul segmentului [XY].

**7.** Teorema lui Menelau pentru  $\triangle CDN$  cu transversala MAB, va da:  $\frac{MC}{MD} = \frac{BC \cdot NA}{BN \cdot AD}$ , iar pentru  $\triangle BAM$  cu transversala MDC se obține  $\frac{MA}{MB} = \frac{DA \cdot CN}{DN \cdot CB}$ . Prin înmulțirea celor două egalități se obține egalitatea cerută.

**8.**  $\frac{3}{5}$ . **9.** Se arată că  $\frac{AO}{OB} \cdot \frac{EB}{EC} \cdot \frac{CD}{CO} = 1$ , unde O este mijlocul laturii [AB] și se aplică reciproca teoremei lui Menelau pentru  $\triangle OBC$ .

**10.** Din egalitatea  $\frac{DA}{DB} = \frac{EC}{EA}$  cu proporții derivate, rezultă că  $\frac{MD}{MA} = \frac{PE}{PA}$ , unde M, N, P sunt mijloacele laturilor [AB], [DE], [AC]. Se aplică apoi reciproca teoremei lui Menelau triunghiului ADE și punctelor M, N, P.

**11.** Se folosește teorema lui Menelau pentru  $\triangle ABC$ , cu transversala EMN,  $\{E\} = MN \cap AC$  și pentru  $\triangle ACD$  cu transversala EAP, apoi teorema lui Menelau pentru  $\triangle ABD$  cu transversala QMF,  $\{F\} = QM \cap BD$  și  $\triangle BCD$  cu transversala PNG,  $\{G\} = PN \cap BD$ . Se arată că  $F = G$ .

**12.** Fie  $\{P_1\} = BE \cap AD$ ,  $\{P_2\} = FC \cap AD$ . Cu teorema lui Menelau în  $\triangle ADC$  (cu transversala  $BP_1E$ ) și  $\triangle ADB$  (cu transversala  $CP_2F$ ) și cu teorema bisectoarei se obțin relațiile:  $\frac{AP_1}{P_1D} = \frac{AE}{CE} \cdot \frac{BC}{BD} = \frac{AD \cdot BC}{DC \cdot BD}$  și  $\frac{AP_2}{P_2D} = \frac{AF}{BF} \cdot \frac{BC}{DC} = \frac{AD \cdot BC}{BD \cdot DC}$ . Așadar  $P_1 = P_2 = P$ .

**13.** Fie R intersecția unghiului  $\widehat{BCD}$  cu BD și  $\{S\} = CR \cap BM$ . Din teorema lui Menelau aplicată în  $\triangle CDR$  și  $\triangle BQT$  cu transversalele BMS și DPN rezultă:  $\frac{SR}{SC} \cdot \frac{BD}{BR} \cdot \frac{MC}{MD} = 1$  și  $\frac{PT}{PQ} \cdot \frac{DQ}{BD} \cdot \frac{NB}{NT} = 1$ , care, prin înmulțire, având în vedere că  $\frac{SR}{SC} = \frac{PQ}{PT}$ , conduc la egalitatea  $\frac{MC}{MD} = \frac{NT}{NB}$ . Dar  $DC = AB = BT$  și astfel  $MD = BN$ .

**14.** Notăm cu K, L, M mijloacele diagonalelor [AC], [BD], [EF] și cu G, H, I mijloacele segmentelor [BC], [CE], [EB]. Se observă că avem:  $K \in GH$ ,  $L \in GI$ ,  $M \in HI$ . Se aplică teorema lui Menelau în  $\triangle BEC$  cu transversala ADF. Se obține  $1 = \frac{KG}{KH} \cdot \frac{LI}{LG} \cdot \frac{MH}{MI} = \frac{AB}{AE} \cdot \frac{DE}{DC} \cdot \frac{FC}{FB}$ , având în vedere liniile mijlocii formate. Din reciproca teoremei lui Menelau pentru  $\triangle GHI$  rezultă că punctele K, L, M sunt coliniare.

**119.** Cu teorema lui Menelau în triunghiurile ADC și ABD cu transversalele BME și CMF se obține că  $\frac{FA}{FB} = \frac{AM}{MD} \cdot \frac{CD}{BC}$  și  $\frac{EA}{EC} = \frac{AM}{MD} \cdot \frac{BD}{BC}$ . Se adună cele două egalități.

**16.** Fie  $\{U\} = AB \cap BC'$ ,  $\{V\} = A'C \cap AB'$ ,  $\{W\} = A'C \cap BC'$ . Se aplică teorema lui Menelau în  $\Delta U VW$  cu transversale  $ANC'$ ,  $CPB'$ ,  $BMA'$ ,  $ABC'$  și  $A'B'C'$

și rezultă egalitățile:  $\frac{C'W}{C'U} \cdot \frac{AU}{AV} \cdot \frac{NV}{NW} = 1$ ,  $\frac{CV}{CW} \cdot \frac{PW}{PU} \cdot \frac{B'U}{B'V} = 1$ ,  $\frac{A'V}{A'W} \cdot \frac{BW}{BU} \cdot \frac{MU}{MW} = 1$ .

$\frac{CW}{CV} \cdot \frac{BU}{BW} \cdot \frac{AV}{AU} = 1$ ,  $\frac{A'W}{A'V} \cdot \frac{B'V}{B'U} \cdot \frac{C'U}{C'W} = 1$ . Se înmulțesc aceste egalități și se aplică reciproca teoremei lui Menelau.

**17.** Fie  $ABC$ ,  $MNP$  cele două triunghiuri și  $\{O\} = AM \cap BN \cap CP$ . Se aplică teorema lui Menelau în  $\Delta OBC$  și transversala  $NP$ , în  $\Delta OCA$  cu transversala  $MP$  și  $\Delta OAB$  cu transversala  $MN$ . Apoi se înmulțesc egalitățile obținute și se aplică reciproca teoremei lui Menelau:

**19.** Cu teorema lui Ceva se obține că  $\frac{AD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1$ , iar din asemănări

$$\frac{CE}{AE} = \frac{DC}{AP} \text{ și } \frac{FA}{FB} = \frac{QA}{BD} \text{ etc.}$$

**20.** a) Se folosește teorema lui Ceva și teorema bisectoarei. b) Cu teorema bisectoarei și teorema Van Aubel se obține:  $\frac{PA}{PD} = \frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB} = \frac{AM}{MC} + \frac{AM}{MB}$ ,

$\frac{PB}{PE} = \frac{BM}{AM} + \frac{BM}{CM}$  și  $\frac{CP}{CF} = \frac{CM}{AM} + \frac{CM}{BM}$ . Se înmulțesc aceste relații și se obține că

$$\left(\frac{AM}{BM} + \frac{BM}{AM}\right) + \left(\frac{AM}{CM} + \frac{CM}{AM}\right) + \frac{BM}{CM} + \frac{CM}{BM} = 6. \text{ Se are în vedere că } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \text{ cu}$$

egalitate numai dacă  $a = b$ .

**21.** Fie  $\{K\} = AP \cap BN$ . Se aplică teorema lui Menelau în  $\Delta MBN$  cu transversala  $AQK$  și  $\Delta BNC$  cu transversala  $AKP$  etc.

**22.** Fie  $\{Q\} = AB \cap EF$ ,  $\{R\} = AB \cap CD$  și  $\{S\} = CD \cap EF$ . Se aplică teorema lui Menelau în triunghiul  $QRS$  și transversalele  $MDE$ ,  $NAF$ ,  $PBC$ . Se înmulțesc egalitățile obținute și se are în vedere puterea punctului față de cerc,

Capitolul III. ELEMENTE DE TRIGONOMETRIE

3. Funcții trigonometrice

3.1. Formule trigonometrice în triunghiul dreptunghic (pag. 206)

**2.**  $\sin B = \frac{15}{17}$ . **3.** a)  $BC = 20$ ,  $AC = 15$ ; b)  $\frac{4}{3}$ ; c)  $AC = 7$ ,  $BC = 24$ . **4.** 450.

**5.**  $BD = 10$ ,  $S = 100$ . **6.**  $h_A = 8 \operatorname{ctg} 15^\circ$ ,  $h_B = h_C = 16 \cos 15^\circ$ . **8.** Fie  $ABC$  un

triunghi dreptunghic și  $x = m(\widehat{B})$ . Atunci  $\sin x = \frac{b}{a}$ ,  $\cos x = \frac{c}{a}$ ,  $\operatorname{tg} x = \frac{b}{c}$  etc.

**10.** a)  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; b)  $\sin x = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ ; c)  $\sin x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

**12.** Se consideră  $\{Q\} = NP \cap CD$  și rezultă  $\sin(\widehat{CDN}) = \sin(\widehat{QDN})$  etc.

**13.** Se arată că  $\Delta BPQ$  este dreptunghic în  $P$ . Rezultă că  $\sin x = \sqrt{\frac{2}{29}}$ .

**14.** Fie  $AB = a$ ,  $CM \perp BF$  și  $\{N\} = CM \cap EF$ . Triunghiul  $MNF$  este dreptunghic isoscel,  $m(\widehat{MNF}) = 45^\circ$  și  $DN = a$ . Din teorema lui Pitagora se obține că

$FN^2 = 2FM^2$ , deci  $FM^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a$ . Din  $\Delta FMC$  se obține că  $\cos x = \frac{FM}{FC} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$  etc.

**15.** Fie  $DM \perp HB$  și  $\{N\} = GH \cap DM$ . Triunghiul  $HMN$  este dreptunghic isoscel și  $EN = AB = a$ . Din teorema lui Pitagora rezultă că  $HD^2 = HE^2 + DE^2 = 10a^2$  și

$HD = a\sqrt{10}$ . Dar  $HN^2 = 2HM^2$  și  $HM = a\sqrt{2}$ . Se obține că  $\cos x = \frac{HM}{HD} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$  etc.

**16.** I. **19.** Se consideră cazurile  $D \in (BC)$  și  $D \notin (BC)$ . **22.** Se are în vedere că

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$  și  $|\sin a| \leq 1$ ,  $|\cos a| \leq 1$ . **23.** b)  $2 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1 + \sin^2 x}{\sin^2 x}$  și

$2 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x}$  etc. **24.** Dacă  $AB = AC$  atunci  $\sin B = \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Reciproc,

dacă  $\sin B + \sin C = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin B + \cos B = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \sqrt{2}$ . Prin ridicare la pătrat

se obține că  $b^2 + a^2 + 2bc = 2a^2$  și cum  $a^2 = b^2 + c^2$  se obține că  $(b - c)^2 = 0$ , deci  $b = c$ .

3.3. Formule de reducere la primul cadran (pag. 210)

34. a)  $\frac{3+3\sqrt{3}}{2}$ ; b)  $1-2\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ; c)  $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ; d)  $-\sqrt{2}$ . 35. a) 1; b)  $\frac{1}{2}$ .

36. a)  $\sin(x+180^\circ) = -\sin(x+180^\circ-180^\circ) = -\sin x$ ; b) Pentru  $n=2k$  obținem egalitatea  $\sin(x+2k\pi) = \sin x$ . Folosind succesiv a) rezultă că:

$$\sin(x+2k\pi) = -\sin(x+(2k-1)\pi) = \sin(x+(2k-2)\pi) = \dots = \sin x.$$

Pentru  $n=2k+1$  se obține că  $\sin(x+(2k+1)\pi) = -\sin x$ . Folosind a) se obține

$$\sin(x+(2k+1)\pi) = -\sin(x+2k\pi) = -\sin x.$$

38. a)  $[0, 2]$ ; b)  $[-2, 0]$ ; c)  $[1, 5]$ ; d)  $[0, 1]$ ; e)  $[0, 2]$ ; f)  $[1, 3]$ ; g)  $\{1\}$ ; h)  $\{1\}$ ; i)  $\{2\}$ ; j)  $[-2, 2]$ . 39. Se are în vedere că  $-1 \leq \sin a \leq 1$  și  $-1 \leq \cos a \leq 1, \forall a \in \mathbb{D}$ .

3.4. Paritate, imparitate, periodicitate (pag. 212)

40. b), c), d), e), f), g), i) funcții pare, j), l) funcții impare. 41. a), c), d) impare.

42. Din  $f(x) = f(-x)$  rezultă că  $a \sin x = 0$ , deci  $a = 0$ , iar din  $f(x) = f(-x)$  se obține  $b \cos x = 0$ , deci  $b = 0$ . Asadar  $ab = 0$  în ambele cazuri.

43. a) Pentru  $a = 0$  funcția  $f$  este pară. b) Pentru  $a = 0$ ,  $f$  este impară. c)  $a = 0$ ,  $f$  este pară. d) Pentru  $a = 0$ ,  $f$  este pară. Pentru  $b = 0$ ,  $a \neq 0$ ,  $f$  este impară.

46. a)  $T = 4\pi$ ; b)  $T = 3\pi$ ; c)  $T = 6\pi$ ; d)  $T = 4\pi$ ; e)  $T = 4\pi$ ; f)  $T = 6\pi$ .

47. a)  $T = 2\pi$ ; b)  $T = 2\pi$ ; c)  $T = 2\pi$ ; d)  $T = 2\pi$ ; e)  $T = \frac{2\pi}{3}$ ; f)  $T = 2\pi$ ; g)  $T = \pi\sqrt{2}$ ;

h)  $T = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ . 48.  $f(x) = \frac{2}{3} \cos x, t = 2\pi$ .

49. a)  $f(x) = \frac{\cos(a-x) - \cos x}{3}$ ; b)  $a = 2k\pi$ ; c)  $a = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  sau  $a = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ .

50. Din egalitatea  $f(x+T) = f(x)$  pentru  $x=0$  rezultă că  $\sin T \cdot \sin T\sqrt{2} = 0$ , de unde  $T = k\pi$  sau  $T = \frac{k\pi}{\sqrt{2}}$ . Perioada principală poate fi  $T = \pi$  sau  $T = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ .

Dacă  $T = \pi$ , ar trebui ca  $\sin(x+\pi)\sin(x\sqrt{2}+\pi\sqrt{2}) = \sin x \sin \sqrt{2}$ ,  $x \in \mathbb{D}$ , deci  $\sin(x\sqrt{2}+\pi\sqrt{2}) = -\sin x \sqrt{2}$ ,  $x \in \mathbb{D}$ . Dacă  $x = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}$  atunci am avea că  $\sin \pi\sqrt{2} = 0$

și nu se poate. Dacă  $T = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$  se ajunge la egalitatea  $\sin\left(x+\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)\sin(x\sqrt{2}+\pi) =$

$= \sin x \cdot \sin x\sqrt{2}$  sau  $\sin\left(x+\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = -\sin x$ , care pentru  $x=0$  conduce la

$\sin \frac{\pi}{\sqrt{2}} = 0$ , care este falsă. Așadar  $f$  nu este periodică.

4. Relații între funcțiile trigonometrice ale aceluiași unghi (pag. 214)

1. f) Se înlocuiește  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$  etc. g)  $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x} = \sin^2 x - \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 1 - \sin x \cos x$ . De asemenea  $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$  etc.

4. Se formează un sistem folosind relația  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ . Se obține  $\sin x = \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  etc. 6. a)  $E = 2$ ; b)  $E = 4$ ; c)  $E = \sin x + \cos x$ .

8. b)  $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x)$  și se aplică a). 9. se exprimă  $\sin x$  în funcție de  $\cos x$  și se descompun diferențele de pătrate. Se obține  $E(x) = 1$ . 10. c) Se descompune suma și diferența de

cuburi. 11. Se obține un sistem luând  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ . Se obține  $\sin x = \frac{1}{2}$ ,

$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  sau  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos x = \frac{1}{2}$  etc.

13. a) Dacă  $\sin a = 1$  atunci  $\cos a = 0$  și avem că  $2 \geq 0$ . Pentru  $1 - \sin a > 0$  se obține că  $(1 - \sin^2 a)^2 x^2 - 2x \cos a(1 - \sin a) + 1 - \sin^2 a \geq 0$  sau  $[(1 - \sin a)x - \cos a]^2 \geq 0$ .

5. Funcțiile trigonometrice ale unei sume și ale unei diferențe de unghiuri (pag. 219)

1. a)  $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ ; b)  $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ ;

c)  $\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ ; d)  $135^\circ = 90^\circ + 45^\circ$ ; e)  $165^\circ = 90^\circ + 75^\circ$

etc. 5. Se are în vedere că  $\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$ , pentru  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

7. Se obține că  $\sin y = \frac{4}{5}, \cos x = \frac{3}{5}$  și  $\sin(x-y) = -\frac{24}{25}, \cos(x-y) = \frac{7}{25}$ .

10. a)  $2 \sin x \cos 75^\circ$ ; b)  $2 \sin 135^\circ \cos 2x$ ; c) 1.

13. c)  $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = \cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) - \sin^2 \beta (1 - \cos^2 \alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$ . d) Se observă că:

$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)$  și  $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x)$ ;

e)  $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) - \sin^2 \beta (1 - \sin^2 \alpha) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$ .

14. f)  $\cos 4x = 2 \cos^2 2x - 1 = 2(2 \cos^2 x - 1)^2 - 1$

g)  $\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x = 4 \sin x \cos x (2 \cos^2 x - 1)$ .

20. a)  $2 \cos 2x - 1 = 2(\cos 2x - \cos 60^\circ) = -4 \sin(x + 30^\circ) \sin(x - 30^\circ)$ , iar  $2 \cos 2x + 1 = 2(\cos 2x + \cos 60^\circ) = 4 \cos(x + 30^\circ) \cos(x - 30^\circ)$  etc.

b)  $1 - \cos 2x + \sin 2x = 2 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x = 2 \sin x (\cos x + \sin x)$  și  $1 + \cos 2x + \sin 2x = 2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 2 \cos x (\sin x + \cos x)$  etc.

c) Se folosește că  $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$  și  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$ .

d) Se arată că  $2 \operatorname{ctg} 2a = \operatorname{ctg} a - \operatorname{tg} a$  și se substituie  $\operatorname{ctg} 4x$  etc.

22. b)  $\sin^2(x + y) + \sin^2(x - y) = (\sin x \cos y + \sin y \cos x)^2 + (\sin x \cos y - \sin y \cos x)^2 = 2 \sin^2 x \cos^2 y + 2 \sin^2 y \cos^2 x$  etc.

23. a) Avem succesiv:  $\cos(x - x^2) [\cos(x - y) - 2 \cos x \cos y] + \cos^2 x + \cos^2 x^2 = -\cos(x - x^2) \cos(x + x^2) + \cos^2 x + \cos^2 x^2 = \cos^2 x + \cos^2 x^2 - \frac{\cos 2x + \cos 2x^2}{2} = 1$ .

b) Se dezvoltă  $\sin(y - z)$ ,  $\sin(z - x)$  și  $\sin(x - y)$ . Rezultă  $E = 0$ .

24.  $2 \cdot \frac{3 + \cos 4x}{1 - \cos 4x} = \frac{3 + \cos 4x}{\sin^2 2x} = \frac{2 + 2 \cos^2 x}{\sin^2 2x} = \frac{1 + (\cos^2 x - \sin^2 x)^2}{2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x + 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x}{2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$ .

25. a) Se folosește  $\cos x = \frac{\sin 2x}{2 \sin x}$ , pentru  $x \in \left\{ a, \frac{a}{2}, \dots, \frac{a}{2^n} \right\}$ . Prin înmulțire se

obține că  $P_n = \frac{\sin 2x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$ . b) Se ia  $x \in \left\{ a, 2a, \dots, 2^{n-1} a \right\}$  în relația  $\cos x = \frac{\sin 2x}{2 \sin x}$

și se face produsul egalităților rezultate.

c)  $(1 + \cos x) \left( 1 + \cos \frac{x}{2} \right) \dots \left( 1 + \cos \frac{x}{2^{n-1}} \right) = 2 \cos^2 \frac{x}{2} \cdot 2 \cos^2 \frac{x}{4} \dots 2 \cos^2 \frac{x}{2^{n-1}}$  și se folosește a).

6. Transformarea sumelor în produs și a produselor în sume (pag. 223)

14. a)  $4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2} = 2 \cos \frac{x}{2} \left( \cos \frac{y+z}{2} + \cos \frac{y-z}{2} \right) = 2 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y+z}{2} + 2 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y-z}{2} = \left( \cos \frac{x+y+z}{2} + \cos \frac{x-y-z}{2} \right) + \left( \cos \frac{x+y-z}{2} + \cos \frac{x-y+z}{2} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) + \cos \left( \frac{\pi}{2} - z \right) + \cos \left( \frac{\pi}{2} - y \right) = \sin x + \sin y + \sin z$ .

15.  $\frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \operatorname{tg} \frac{x+y}{2}$  și se folosește formula  $\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$  pentru  $a = \frac{x+y}{2}$ . Din  $(\sin x + \sin y)^2 + (\cos x + \cos y)^2 = k$  se obține  $\cos(x-y) = k_1$  și se folosește formula  $\operatorname{tg} a = \frac{\sin 2a}{1 + \cos 2a}$  pentru  $a = \frac{x-y}{2}$ .

16. f)  $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{y}{2} \operatorname{ctg} \frac{z}{2} = \frac{\cos \frac{x}{2} \sin \frac{y+z}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2}} = \frac{\cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2} - \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y+z}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \frac{\cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2}} \quad (1)$ .

Avem  $\cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2} - \sin \frac{x}{2} = \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2} - \cos \left( \frac{y+z}{2} \right) = \sin \frac{y}{2} \sin \frac{z}{2}$ . Înlocuind în (1) se obține identitatea din enunț.

7. Sume și produse trigonometrice (pag. 227)

7. a) Se folosește formula  $2 \cos a - 1 = \frac{2 \cos 2a + 1}{2 \cos a + 1}$  pentru  $a \in \left\{ x, 2x, 2^2 x, \dots, 2^{n-1} x \right\}$

și se înmulțesc relațiile. Se obține  $P_n = \frac{2 \cos 2^n x + 1}{2 \cos x + 1}$ . b)  $\frac{\operatorname{tg} 2^{n-1} a}{\operatorname{tg} \frac{a}{2}}$

c)  $\frac{\cos a - \cos b}{2^n \left( \cos \frac{a}{2^n} - \cos \frac{b}{2^n} \right)}$ . Se folosește  $\cos a + \cos b = \frac{\cos 2a - \cos 2b}{2(\cos a - \cos b)}$ .

d) Se folosește relația:  $1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2^k} = \frac{\cos \frac{x}{2^{k+1}}}{\cos^2 \frac{x}{2^k}}$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Se face produsul și se

obține că  $P_n = \frac{\cos x}{\cos \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{a}{4} \dots \cos \frac{a}{2^{n-1}} \cdot \cos^2 \frac{a}{2^n}}$ , iar pentru numitor se folosește

relația  $\cos x = \frac{\sin 2x}{2 \sin x}$ .

**Capitolul IV. APLICAȚIILE TRIGONOMETRIEI ÎN GEOMETRIA PLANĂ**

**1. Produsul scalar a doi vectori (pag. 230)**

- 5.** a)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow m = -3$ ; **d)**  $m \in \{-\sqrt{15}, \sqrt{15}\}$ ; **e)**  $m \in \left\{2, \frac{7}{3}\right\}$ .
- 6.** Se folosește formula  $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ . **a)**  $m = 0$ ; **b)**  $m \in \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right\}$ ; **c)**  $m = 0$ ;  
**d)**  $m \in \{0, 3\}$ .
- 7.**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{0}$ . **a)**  $m = -2, n = -6$ ; **d)**  $m = n = 0$  sau  $m = n = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ .
- 14.** **a)**  $M(0, 0), M(6, 0)$  sau  $M(0, 4)$ .

**2. Teorema cosinusului. Teorema sinusurilor (pag. 233)**

- 2.** **a)**  $b \cos C + c \cos B = b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + c \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = a$ .
- 3.** **a)**  $(b^2 + c^2 - a^2) \operatorname{tg} A = (a^2 + c^2 - b^2) \operatorname{tg} B \Leftrightarrow 2bc \cos A \frac{\sin A}{\cos A} = 2ac \cos B \frac{\sin B}{\cos B} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow b \sin A = a \sin B \Leftrightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$  (teorema sinusurilor).
- d)** Cu teorema sinusurilor avem:  $a \sin(B - C) + b \sin(C - A) + c \sin(A - B) =$   
 $= k \sin A \sin(B - C) + k \sin B \sin(C - A) + k \sin C \sin(A - B) = k [\cos(A - B + C) -$   
 $-\cos(A + B - C) + \cos(B - C + A) - \cos(B + C - A) + \cos(C - A + B) - \cos(C + A - B)] = 0$ .
- 4.** Dacă  $m(\hat{A}) = 90^\circ$  rezultă  $\sin^2 B + \sin^2 C = 1 = \sin^2 A$ .  
Reciproc, fie că  $\sin^2 B + \sin^2 C = \sin^2 A$ . Rezultă că  $1 - \cos 2B + 1 - \cos 2C - 1 +$   
 $+ \cos 2A = 0 \Rightarrow 2 \sin^2 B - 2 \sin(A + C) \sin(A - C) = 0 \Rightarrow \sin B(\sin B - \sin(A - C)) = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \sin B = \sin(A - C) \Rightarrow A = 90^\circ$ . **5.** Se arată că în triunghiul ABC,  $\cos A < 0$ ,  
deci triunghiul este obtuzunghic. **8.**  $A = 60^\circ$ .

**3. Aplicații vectoriale în geometria plană (pag. 236)**

- 5.** Fie O centrul dreptunghiului. Cu teorema medianei se obține că  $4MO^2 = 2(MA^2 + MC^2) - AC^2$  și  $4MO^2 = 2(MB^2 + MD^2) - BD^2$  și rezultă egalitatea cerută. **9.** Cu teorema medianei se obține  $2(a^2 + c^2) - b^2 = 7$  și  $2(a^2 + b^2) - c^2 = 13$ , de unde  $a = 2, b = \sqrt{3}, c = 1$  etc. **11.** Dacă G este centrul de greutate al triunghiului se obține că  $GB = \frac{2}{3} m_b, GC = \frac{2}{3} m_c$  și se aplică teorema lui Pitagora. **12.** Aplicând teorema medianei se obține un sistem de ecuații cu soluția  $a = 5, b = 24, c = 26$ . **14.** Se aplică teorema medianei în triunghiurile MAB, MBC, MCD, MAD. **15.** Se aplică teorema medianei.

- 16.** Avem  $MQ \cdot MP = MA \cdot MB$  și  $NR \cdot NP = NB \cdot NA$ . Din teorema medianei rezultă că  $2(PM^2 + PN^2) = MN^2 + 4PO^2$ . Din  $\frac{1}{MQ^2} + \frac{1}{NR^2} = \frac{MP^2}{MA^2 \cdot MB^2} + \frac{NP^2}{NB^2 \cdot NA^2}$  și se are în vedere că  $MA = NB$  și  $NA = MB$  etc.
- 19.** Fie O centrul pătratului. Se aplică teorema medianei în triunghiurile MAC și MBD etc. **21.**  $t_A = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c} \leq \frac{2bc}{b+c} \leq \frac{b+c}{2}$  etc. **30.** Cu teorema medianei avem că  $2(MB^2 + MC^2) - BC^2 = 4MO^2$ , unde O este mijlocul lui [BC]. Minimul are loc pentru MO minim, deci când  $OM \perp AC$ .

**Capitolul V. PROBLEME RECAPITULATIVE DE GEOMETRIE (pag. 246)**

- R2.** Fie N mijlocul segmentului [AB]. **a)** Deoarece  $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MN}$  este necesar ca  $\vec{MN}$  să aibă direcția lui  $\vec{BC}$ , deci M este pe linia mijlocie a triunghiului. **b)** Fie S mijlocul segmentului [NC]. Se obține că  $\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} = 4\vec{MS}$ . Așadar  $\vec{MS}$  este coliniar cu  $\vec{AB}$ . **R4.** **a)**  $m = \frac{1}{2}$ ; **b)**  $m \in \left\{\pm \frac{1}{2}\right\}$ . **R8.** **a)** Avem  $x = 4 - m, y = m - 5, M(x, y)$ . Se obține că  $x + y = -1$ . **R9.**  $a = b = 1$ .
- R23.** **a)** Avem  $1 \leq (x - 1)^2 + 1 = \cos y \leq 1$  deci  $x = 1$  și  $\cos y = 1$  etc.  
**b)**  $\Delta = 4 \sin^2 3y - 4 \leq 0$ . Ecuația are soluții reale dacă  $\sin^2 3y = 1$  etc.
- c)** Avem  $2 \leq \left|y + \frac{1}{y}\right| = 1 + \sin^2 x \leq 2$  etc.
- d)** Se are în vedere că  $2 \leq 2^x + 2^{-x} = 1 + \cos^2 y \leq 2$  etc.
- e)**  $2 \leq 2^{x^2} + 2^{y^2} = 1 + \sin^2 x \leq 2$  etc.
- R24.** **b)** Avem succesiv  $2 \cos(B + C) \cos(B - C) = 2 \cos^2 A$ .  
Dar  $\cos(B + C) = -\cos A$  și se obține că  $2 \cos A [\cos(B - C) - \cos A] = 0$ . Din  $\cos A = 0$  se obține  $A = 90^\circ$ . Din  $\cos(B - C) - \cos A = 0$  se obține că  $\cos B \cdot \cos C = 0$ , deci  $B = 90^\circ$  sau  $C = 90^\circ$ .
- d)** Înlocuim  $\sin A \sin B = \frac{\cos(A - B) - \cos(A + B)}{2} = \frac{\cos(A - B) + \cos C}{2}$ . Notând  $\cos C = x$  se obține ecuația de gradul al doilea  $4x^2 + 4x \cos(A - B) + 1 = 0$ . Se pune condiția  $\Delta \geq 0$ , deci  $\cos^2(A - B) \geq 1$ . Se obține  $\cos^2(A - B) = 1$  și  $\cos C = \pm \frac{1}{2}$  etc. **R26.** Se înlocuiește  $h_A = \frac{2S}{a}$  etc.
- R35.** Avem succesiv  $\sqrt{2} = 2 \cos \frac{\pi}{4}, \sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{4}\right)} = 2 \cos \frac{\pi}{8}$  și se aplică relația  $1 - \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$  etc. Se poate demonstra și prin inducție matematică.

## INDICE DE AUTORI

Andrei Gheorghe: AII. §4. pr. 51

Andrica Dorin: AII. §4. pr. 52

Andronache Marian: GII. §2. pr. 66

Băluță Mihai: GIV. §4. T4. pr. 3

Busneag Dumitru: AI §1. pr. 141

Ferenc Olozs: GII. §3. pr. 102

Năchilă Petre: AI §1. pr. 130

Panaïtopol Laurentiu: AI. §4. pr. 17; GII §1. pr. 43

Panaïtopol M. Elena: AI. §4. pr. 16

Tincui V.: GII §3. T2. pr. 3

Tomescu Ioan: GIV. §4. pr. 38

Zărnă Catalin: GII. §3. pr. 29

### Probleme ale autorilor

AI. §1. pr. 129, 131-133, 135, 137-139, 150, 153-161, 164, 165;

§4. pr. 31, 34, 35, 38-41, 84

AII. §1. pr. 30; §2. pr. 76; §3. pr. 57-59; §4. pr. 4-6, 8, 9, 12, 14, 19-29, 32, 37,

40, 47, 61, 67, 68; §5. pr. 3, 5, 6, 18, 22, 23, 25, 26; T4. pr. 1, 2, 3

AIII. §2. pr. 13, 14; §3. pr. 15; §5. pr. 10-12

AIV. §5. pr. 10-12, 15; §6. pr. 6, 7; R33, R59-R64

GII. §2. pr. 19

GIV. §3. pr. 10, 12-13, 15, 48, 49

## CUPRINS

### ELEMENTE DE ALGEBRĂ

<b>Capitolul I - MULTIMI SI ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ</b> .....	5
1. <i>Mulțimea numerelor reale</i> .....	5
1.1. Operații algebrice cu numere reale .....	5
1.2. Ordinea numerelor reale .....	11
1.3. Modulul unui număr real .....	18
1.4. Aproximări prin lipsă sau prin adaos .....	23
1.5. Parte întreagă. Parte fracționară .....	25
1.6. Operații cu intervale de numere reale .....	30
2. Propoziții. Predicai. Cuantificatori .....	34
3. Operații logice elementare corelate cu operații și relații cu mulțimi .....	41
3.1. Operații logice elementare cu propoziții Formule de calcul propozițional .....	41
3.2. Operații logice elementare cu predicate Operații și relații cu mulțimi .....	44
3.3. Reguli de negare a propozițiilor universale și a propozițiilor existențiale Condiții necesare. Condiții suficiente .....	48
4. Tipuri de raționamente logice .....	52
4.1. Metode inductive matematice .....	52
4.2. Probleme de numărare .....	59
<b>Capitolul II - FUNCȚII</b> .....	63
1. <i>Siruri de numere reale</i> .....	63
1.1. Noțiunea de sir de numere reale .....	63
1.2. Siruri mărginite .....	66
1.3. Siruri monotone .....	68
2. Tipuri de siruri .....	71
2.1. Progresii aritmetice .....	71
2.2. Progresii geometrice .....	73
2.3. Aplicații .....	77
3. <i>Funcții. Lecturi grafice</i> .....	86
3.1. Reper cartezian. Produs cartezian Drepte în plan de forma $ax + m$ sau $y = m, m \in \mathbb{R}$ .....	86
3.2. Noțiunea de funcție .....	89
3.3. Imaginea și preimaginea unei mulțimi printr-o funcție. Graficul funcției Restricții ale unei funcții .....	95
3.4. Funcții numerice .....	98
4. <i>Proprietăți generale ale funcțiilor</i> .....	100
4.1. Funcții mărginite .....	100
4.2. Funcții pare. Funcții impare .....	101
4.3. Funcții periodice .....	105
4.4. Funcții monotone .....	107
5. <i>Componența funcțiilor</i> .....	111
<b>Capitolul III - FUNCȚIA DE GRADUL I</b> .....	116
1. <i>Definiția funcției de gradul I</i> Reprezentare grafică .....	116
2. <i>Monotonie funcții de gradul I</i> .....	120
3. <i>Semnii funcției de gradul I</i> Inecuații de gradul I .....	122
4. <i>Poziții relative a două drepte</i> Sisteme de ecuații liniare .....	125
5. <i>Sisteme de inecuații de gradul I</i> .....	126
<b>Capitolul IV - FUNCȚIA DE GRADUL AL DOILEA</b> .....	129
1. <i>Definiția funcției de gradul al doilea</i> Reprezentare grafică .....	129
2. <i>Relațiile lui Viete</i> .....	134

3. <i>Monotonie funcției de gradul al doilea</i> .....	138
4. <i>Semnii funcției de gradul al doilea</i> Inecuații de gradul al doilea .....	139
5. <i>Poziția relativă a unei drepte față de o parabolă</i> .....	144
6. <i>Poziția relativă a două parabole</i> .....	146

### Capitolul V - PROBLEME RECAPITULATIVE DE ALGEBRĂ

### ELEMENTE DE GEOMETRIE

<b>Capitolul I - VECTORI ÎN PLAN</b> .....	162
1. <i>Segmente orientate. Relația de colinearitate</i> .....	162
2. <i>Operații cu vectori</i> .....	163
2.1. Suma și diferența vectorilor .....	163
2.2. Înmulțirea cu scalari a vectorilor .....	170
3. <i>Descompunerea unui vector după doi vectori necoliniari</i> .....	176
4. <i>Reper cartezian</i> .....	177
4.1. Coordonatele unui vector .....	177
4.2. Distanța dintre două puncte .....	181

### Capitolul II - COLINIARITATE. CONCURENȚA PARALELISM

1. <i>Vectorul de poziție al unui punct în plan</i> .....	185
2. <i>Centre de greutate</i> .....	191
3. <i>Teorema bisectoarei. Relația lui Sylvester</i> .....	195
4. <i>Teorema lui Menelaus</i> .....	201

### Capitolul III - ELEMENTE DE TRIGONOMETRIE

1. <i>Unghiuri și arce</i> Măsură unghiurilor și a arcelor .....	204
2. <i>Generalizarea noțiunii de unghi</i> .....	205
3. <i>Funcții trigonometrice</i> .....	206
3.1. <i>Formulele trigonometrice în triunghiul dreptunghic</i> .....	206
3.2. <i>Semnii funcțiilor trigonometrice</i> .....	209
3.3. <i>Formule de reducere la primul cadran</i> .....	210
3.4. <i>Paritate. Imparitate. Periodicitate</i> .....	212
4. <i>Relații între funcțiile trigonometrice ale arcelor și unghi</i> .....	214
5. <i>Funcțiile trigonometrice ale unei stăne și ale unei diferențe de mărimi</i> .....	219
6. <i>Transformarea sumelor în produse și a produselor în sume</i> .....	223
7. <i>Stăne și produse trigonometrice</i> .....	227

### Capitolul IV - APLICĂȚI ALE TRIGONOMETRIEI ÎN GEOMETRIA PLANĂ

1. <i>Produsul scalar a doi vectori</i> .....	230
2. <i>Teorema cosinusului. Teorema sinusurilor</i> .....	233
3. <i>Aplicații vectoriale în geometria plană</i> .....	236
4. <i>Aplicații trigonometrice în geometria plană</i> .....	239
4.1. <i>Rezolvarea triunghiurilor</i> .....	239
4.2. <i>Raza cercului înscris și raza cercului circumscris unui triunghi</i> .....	242
4.3. <i>Formule pentru aria triunghiului</i> .....	242

### Capitolul V - PROBLEME RECAPITULATIVE DE GEOMETRIE

.....	246
-------	-----

### INDICĂȚI SI RĂSPUNSURI

.....	251
-------	-----

Redactor: **Carmen Joldescu**  
Tehnoredactor: **Marius Hirzoiu**  
Corectură: **autorii**  
Copertă: **Anamaria Vasiliu**  
Tehnoredactare computerizată: **Editura CARMINIS**

---

Tiparul executat la **S.C. TIPARG S.A. Pitești**

---

Comenzile se primesc la tel./fax: **0248253022**, 0248252467  
sau pe adresa: **Editura CARMINIS**, str. Exercițiu, bl. D22, sc. B, ap. 1  
cod 110242 – Pitești, jud. Argeș  
e-mail: [editura\\_carminis@yahoo.com](mailto:editura_carminis@yahoo.com)  
[www.carminis.ro](http://www.carminis.ro)

---

**ISBN 973-8418-88-7**

